MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

59. BAND 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 23. FEBRUAR 1954)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

59. Band **Inhalt** 5. (Schluß-)Heft

Seite

Volkmann, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffereigenschaften charakterisiert sind. IV 425

Neumer, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. II 434

Schöneborn, H., Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I 455

Carlitz, L., Congruence properties of the polynomials of Hermite, Laguerre and Legendre 474

Ringel, G., Lokal-reguläre Zerlegungen geschlossener orientierbarer Flächen . . . 484

VOLKMANN, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 425—433 (1954)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. IV.

Von
BODO VOLKMANN.

1. Ist ζ eine reelle Zahl mit $0 \leqq \zeta \leqq 1$ und $G(\zeta)$ die Menge der Zahlen ϱ, deren dyadische Entwicklung

$$\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i} \qquad (e_i = 0 \text{ oder } 1, \text{ unendlich viele } e_i \neq 0) \tag{1}$$

der Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i = \zeta \tag{2}$$

genügt, so besagen Ergebnisse von BESICOVITCH[1]) und KNICHAL[2]), daß die gebrochene Dimension[3]) von $G(\zeta)$ für $\zeta = 0$ und $\zeta = 1$ verschwindet und sonst den Wert

$$\dim G(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1-\zeta) \log (1-\zeta)}{\log \frac{1}{2}} \tag{3}$$

hat. Für eine Verallgemeinerung von (3) auf g-adische Entwicklungen

$$\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{g^i} \qquad (e_i,\ g \text{ ganz};\ 0 \leqq e_i < g;\ \text{unendlich viele } e_i \neq 0) \tag{4}$$

mit $g \geqq 2$ liegen zwei verschiedene Möglichkeiten nahe:

1. Man kann den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} e_i$ in (2) als Anzahl der Einsen unter den ersten n Ziffern der dyadischen Entwicklung (1) auffassen, analog dazu bei g-adischen Entwicklungen (4) für $j = 0, \ldots, g-1$ die Anzahl $A_j(\varrho, n)$ der Ziffern e_i mit $i \leqq n$ und $e_i = j$ betrachten und nach der gebrochenen Dimension der Menge $G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1})$ der Zahlen ϱ mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_j(\varrho, n)}{n} = \zeta_j \qquad \left(j = 0, \ldots, g-1;\quad 0 \leqq \zeta_j \leqq 1;\quad \sum_{j=0}^{g-1} \zeta_j = 1\right)$$

fragen.

---

[1]) BESICOVITCH, A. S.: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system. Math. Ann. **110**, 321—330 (1934).

[2]) KNICHAL, V.: Dyadische Entwicklungen und HAUSDORFFsches Maß. Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême, Cl. Sci. Nr. XIV (1933).

[3]) Wir verwenden hier die Terminologie von Teil I dieser Serie. Math. Z. **58**, 284—287 (1953).

2. Man kann den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} e_i$ in (2) als Summe der ersten n Ziffern ansehen, entsprechend bei g-adischen Entwicklungen (4) die Funktion $S(\varrho, n) = \sum_{i=1}^{n} e_i$ einführen und die Menge $M(\zeta)$ der Zahlen ϱ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(\varrho, n)}{n} = \zeta \qquad (0 \leq \zeta \leq g-1)$$

betrachten.

Beide Verallgemeinerungen sind von EGGLESTON vorgenommen worden, der zu folgenden Ergebnissen kam:

Satz 1[4]). Legt man dem Ausdruck $0 \cdot \log \infty$ den Wert 0 zu, so ist

$$\dim G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1}) = \frac{\sum_{j=0}^{g-1} \zeta_j \log \frac{1}{\zeta_j}}{\log g}.$$

Satz 2[5]). Sei r die zwischen 0 und 1 gelegene Lösung der Gleichung

$$\sum_{j=0}^{g-1} (j-\zeta)\, z^j = 0. \tag{5}$$

Dann ist, wenn $0^\circ = 1$ gesetzt wird,

$$\dim M(\zeta) = \frac{\log\left(\frac{1 + r + \cdots + r^{g-1}}{r^\zeta}\right)}{\log g}. \tag{6}$$

In Teil II dieser Serie[6]) ist Satz 1 noch dadurch verallgemeinert worden, daß die Menge $\mathfrak{G} = \{0, 1, \ldots, g-1\}$ der g-adischen Ziffern in $m \geq 1$ paarweise elementfremde Mengen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m$ zerlegt wurde und man die Menge $G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ der Zahlen ϱ betrachtete, bei deren g-adischer Entwicklung (4) die Funktionen

$$A_\mu(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i \in \mathfrak{G}_\mu}}^{n} 1 \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{7}$$

vorgeschriebenen Bedingungen der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_\mu(\varrho, n)}{n} = \zeta_\mu \qquad \left(\mu = 1, \ldots, m;\ 0 \leq \zeta_\mu \leq 1;\ \sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu = 1\right) \tag{8}$$

genügen. Es ergab sich der

Satz 3. Wird die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}_\mu$ mit w_μ bezeichnet $\left(\sum_{\mu=1}^{m} w_\mu = g\right)$, so ist

$$\dim G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m) = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu \log \frac{w_\mu}{\zeta_\mu}}{\log g}. \tag{9}$$

---

[4]) EGGLESTON, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. J. Math. **20**, 31—36 (1949).

[5]) EGGLESTON, H. G.: Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory. Proc. London Math. Soc. **254**, 42—93 (1951). Theorem 14 und Korollar.

[6]) Math. Z. **59**, 247—254 (1953), Satz 1.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Satz bewiesen, der die Sätze 2 und 3, also auch den Satz 1, als Spezialfälle enthält und so die beiden verschiedenartigen Verallgemeinerungen von (3) unter neuen Gesichtspunkten wieder zusammenfaßt. Dabei werden die Grundgedanken der EGGLESTONschen Beweise teilweise beibehalten.

2. Wie bei Satz 3 sei die Menge $\mathfrak{G} = \{0, 1, \ldots, g-1\}$ der g-adischen Ziffern in m paarweise elementfremde Mengen $\mathfrak{G}_\mu = \{g_{\mu 1}, g_{\mu 2}, \ldots, G_{\mu w_\mu}\}$ zerlegt. Jeder Ziffer $g_{\mu\nu}$ aus $\mathfrak{G}_\mu$ sei eine nichtnegative reelle Zahl $\lambda_{\mu\nu} = \lambda(g_{\mu\nu})$ als „Gewicht" zugeordnet, und die $g_{\mu\nu}$ sollen so numeriert sein, daß $\lambda_{\mu 1} \geqq \lambda_{\mu 2} \geqq \cdots \geqq \lambda_{\mu w_\mu}$ wird. Für eine Zahl ϱ mit der g-adischen Entwicklung (4) betrachten wir dann die Funktionen

$$S_\mu(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i \in \mathfrak{G}_\mu}}^{n} \lambda(e_i), \quad A_\mu(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i \in \mathfrak{G}_\mu}}^{n} 1 \quad \text{und} \quad A_{\mu\nu}(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i = g_{\mu\nu}}}^{n} 1,$$

zwischen denen offensichtlich die Beziehungen

$$S_\mu(\varrho, n) = \sum_{\nu=1}^{w_\mu} \lambda_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(\varrho, n), \quad A_\mu(\varrho, n) = \sum_{\nu=1}^{w_\mu} A_{\mu\nu}(\varrho, n) \tag{10}$$

bestehen.

Sind $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ nichtnegative reelle Zahlen mit $\zeta_\mu = 0$ im Falle $\lambda_{\mu 1} = 0$, so sei $M = M(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m;\ \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1);\ \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ die Menge der ϱ mit $0 < \varrho \leqq 1$, für die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_\mu(\varrho, n)}{n} = \zeta_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{11}$$

ist. Dann gilt der folgende

Ziffernsatz. Im kartesischen Koordinatensystem der m reellen Veränderlichen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sei H der Durchschnitt der Hyperebene $\sum_{\mu=1}^{m} \sigma_\mu = 1$ mit dem m-dimensionalen Würfel $0 \leqq \sigma_\mu \leqq 1$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ und W der durch

$$\frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu 1}} \leqq \sigma_\mu \leqq \frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu w_\mu}} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)^{7}) \tag{12}$$

definierte Quader.

a) Ist der Durchschnitt $W \wedge H$ leer, so ist die Menge M leer.

b) Andernfalls sei für jedes $\sigma_\mu \neq 0$, das der Bedingung (12) genügt, $r_\mu(\sigma_\mu)$ die positive Lösung der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{w_\mu} \left(\lambda_{\mu\nu} - \frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu}\right) z^{\lambda_{\mu\nu}} = 0, \tag{13}$$

falls es genau eine solche gibt, sonst $r_\mu(\sigma_\mu) = 1$, und ferner sei

$$\tau_\mu(\sigma_\mu) = \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} r_\mu(\sigma_\mu)^{\lambda_{\mu\nu}}\right)^{\sigma_\mu}}{r_\mu(\sigma_\mu)^{\zeta_\mu}}.$$

---

7) Dabei ist der Ausdruck „0/0" $= 1$ zu setzen, ausgenommen im Fall $\zeta_\mu = \lambda_{\mu 1} = 0$, wo (11) als $0 \leqq \sigma_\mu \leqq 1$ zu lesen ist.

Dann ist

$$\dim M = \max_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\in W\wedge H} \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \log\left(\frac{\tau_\mu(\sigma_\mu)}{\sigma_\mu^{\sigma_\mu}}\right)}{\log g} = \delta. \tag{14}$$

Vor dem Beweis des Ziffernsatzes soll gezeigt werden, daß er die Sätze 2 und 3 wirklich als Spezialfälle enthält. Um Satz 2 zu erhalten, hat man $m=1$ und $\lambda(j)=j$ $(j=0,\ldots,g-1)$ zu setzen. Der Durchschnitt $W\wedge H$ besteht dann nur aus dem Punkt 1, so daß in (12) $\sigma_1=1$ zu setzen ist. Damit geht (13) in (5) über, und da $r_1(1)=r$ sowie $\tau_1(1)=\frac{1+r+\cdots+r^{g-1}}{r^\zeta}$ wird, ist auch (14) mit (6) identisch.

Satz 3 gewinnt man aus dem Ziffernsatz dadurch, daß man $m=g$, $\mathfrak{G}_{\mu+1}=\{\mu\}$ und $\lambda(\mu)=1$ $(\mu=0,\ldots,g-1)$ setzt. Dann besteht W gemäß (11) nur aus dem Punkt $(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)$, der nach (8) zu H gehört. Also ist $\sigma_\mu=\zeta_\mu$ $(\mu=1,\ldots,m)$, und da somit bei den Gln. (13) die Koeffizienten $\lambda_{\mu\nu}-\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu}$ sämtlich verschwinden, ist im Sinne des Ziffernsatzes überall $r_\mu(\sigma_\mu)=1$ zu setzen. Es ergibt sich $\tau_\mu(\sigma_\mu)=w_\mu^{\zeta_\mu}$, so daß (14) in (9) übergeht.

3. Zum Beweis von Teil a) des Ziffernsatzes verwenden wir den

Hilfssatz 1. Für irgendein ϱ mit $0<\varrho\leqq 1$ sei

$$\underline{\sigma}_\mu(\varrho)=\varliminf_{n\to\infty}\frac{A_\mu(\varrho,n)}{n}, \qquad \bar{\sigma}_\mu(\varrho)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{A_\mu(\varrho,n)}{n}$$

und $L(\varrho)$ der durch $\underline{\sigma}_\mu(\varrho)\leqq\sigma_\mu\leqq\bar{\sigma}_\mu(\varrho)$ $(\mu=1,\ldots,m)$ definierte m-dimensionale Quader. Dann ist der Durchschnitt $L(\varrho)\wedge H$ nicht leer.

Beweis. Da die Glieder der Folge $\frac{A_1(\varrho,n)}{n}$ beschränkt sind, gibt es eine Folge $\{i_n^{(1)}\}$ natürlicher Zahlen, für die $\lim_{n\to\infty}\frac{A_1(\varrho,i_n^{(1)})}{i_n^{(1)}}$ existiert. Aus $\{i_n^{(1)}\}$ kann man eine Teilfolge $\{i_n^{(2)}\}$ auswählen, für die ebenfalls $\lim_{n\to\infty}\frac{A_2(\varrho,i_n^{(2)})}{n}$ existiert, daraus eine Teilfolge $\{i_n^{(3)}\}$ usw. So gelangt man zu einer Folge $\{i_n^{(m)}\}=i_n$, für die sämtliche m Grenzwerte

$$\psi_\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{A_\mu(\varrho,i_n)}{i_n} \qquad (\mu=1,\ldots,m)$$

vorhanden sind. Dann ist wegen

$$\sum_{\mu=1}^{m} A_\mu(\varrho,n)=n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

offenbar $\sum_{\mu=1}^{m}\psi_\mu=1$. Ferner gilt $\underline{\sigma}_\mu(\varrho)\leqq\psi_\mu\leqq\bar{\sigma}_\mu(\varrho)$ $(\mu=1,\ldots,m)$ und somit $(\psi_1,\ldots,\psi_m)\in L(\varrho)\wedge H$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Ist $\varrho\in M$, so gilt nach (9)

$$\lambda_{\mu w_\mu}A_\mu(\varrho,n)\leqq S_\mu(\varrho,n)\leqq\lambda_{\mu 1}A_\mu(\varrho,n) \qquad (n=1,2,\ldots),$$

also in der Bezeichnungsweise des voranstehenden Hilfssatzes

$$\lambda_{\mu w_\mu}\bar{\sigma}_\mu(\varrho)\leqq\zeta_\mu\leqq\lambda_{\mu 1}\underline{\sigma}_\mu(\varrho)$$

und damit $\frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu 1}} \leqq \underline{\sigma}_\mu(\varrho) \leqq \bar{\sigma}_\mu(\varrho) \leqq \frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu w_\mu}}$. Nach (11) ist also $W \geqq L(\varrho)$, und folglich kann $W \wedge H$ nicht leer sein, da sonst $L(\varrho) \geqq H$ leer wäre — im Widerspruch zu Hilfssatz 1.

4. Zum Beweis von Teil b) des Ziffernsatzes zeigen wir zunächst

$$\dim M \leqq \delta. \tag{15}$$

Dazu benötigen wir den

Hilfssatz 2. Sei $\sigma_\mu = \frac{t_\mu}{n}$ eine der Bedingung (12) genügende Zahl und $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon)$ die Anzahl der t_μ-stelligen g-adischen Brüche $0, e_1 \ldots e_{t_\mu}$, bei denen sämtliche e_i aus $\mathfrak{G}_\mu$ sind und ferner

$$(\zeta_\mu - \varepsilon)\, n \leqq \sum_{i=1}^{t_\mu} \lambda(e_i) \leqq (\zeta_\mu + \varepsilon)\, n \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \varepsilon > 0) \tag{16}$$

gilt. Dann gibt es eine positive, von ε und n unabhängige Zahl $K(\sigma_\mu)$ mit

$$N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) \leqq \tau_\mu(\sigma_\mu)^{n\,(1+K(\sigma_\mu)\,\varepsilon)}. \tag{17}$$

Beweis. a) Die Zahlen $\lambda_{\mu 1}, \ldots, \lambda_{\mu w_\mu}$ mögen alle denselben Wert λ_μ haben. Im Falle $\lambda_\mu > 0$ muß dann nach (12) $\sigma_\mu = \frac{\zeta_\mu}{\lambda_\mu}$ sein, und daher ist (16) für jede Ziffernfolge aus $\mathfrak{G}_\mu$ erfüllt, so daß $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) = w_\mu^{\zeta_\mu n}$ wird. Daraus folgt (17), da im Sinne des Ziffernsatzes $\tau_\mu(\sigma_\mu) = w_\mu^{\zeta_\mu}$ ist. Im Falle $\lambda_\mu = 0$, wo definitionsgemäß $\zeta_\mu = 0$ ist und σ_μ gemäß Fußnote [7]) jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann, erhält man entsprechend $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) = w_\mu^{t_\mu} = w_\mu^{\sigma_\mu n}$, so daß (17) ebenfalls erfüllt ist, da $\tau_\mu(\sigma_\mu) = w_\mu^{\sigma_\mu}$ wird.

b) Wenn die Zahlen $\lambda_{\mu 1}, \ldots, \lambda_{\mu w_\mu}$ nicht alle gleich sind, ist $r_\mu(\sigma_\mu)$ als Lösung von (12) eindeutig, wie eine einfache algebraische Betrachtung zeigt.

b 1) Es sei zunächst vorausgesetzt, daß alle $\lambda_{\mu\nu}$ rational sind, also etwa $\lambda_{\mu\nu} = \frac{u_{\mu\nu}}{v}$ bei ganzen $u_{\mu\nu}$ und v. Somit läßt sich bei der Definition von $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon)$ unter Verwendung der Schreibweise $\lambda(g_{\mu\nu}) = \frac{u(g_{\mu\nu})}{v}$ die Gl. (16) ersetzen durch

$$(\zeta_\mu - \varepsilon)\, n\, v \leqq \sum_{i=1}^{t_\mu} u(e_i) \leqq (\zeta_\mu + \varepsilon)\, n\, v. \tag{18}$$

Daher wird, wenn man den Ausdruck $\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} z^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}$ als Polynom $\sum_{\varkappa=0}^{u_{\mu 1} t_\mu} \beta_{\mu\varkappa} z^\varkappa$ schreibt, offenbar

$$N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) = \sum_{\varkappa} \beta_{\mu\varkappa}, \quad \text{summiert über } (\zeta_\mu - \varepsilon)\, n\, v \leqq \varkappa \leqq (\zeta_\mu + \varepsilon)\, n\, v. \tag{19}$$

Für jeden dieser Koeffizienten $\beta_{\mu\varkappa}$ gilt nach dem Residuensatz

$$\beta_{\mu\varkappa} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_\mu} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} z^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}}{z^{\varkappa+1}}\, dz,$$

wobei $\mathfrak{K}_\mu$ eine geschlossene Kurve um den Nullpunkt ist. Wir wählen für $\mathfrak{K}_\mu$ den Kreis um den Nullpunkt, auf dem die Funktion

$$\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}|z|^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}|z|^{-\zeta_\mu n v}$$

möglichst klein wird. Es muß also

$$|z|^{\zeta_\mu n v}\, t_\mu\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}|z|^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu-1}\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}u_{\mu\nu}|z|^{u_{\mu\nu}-1}\right)-\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}|z|^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}\zeta_\mu n v\,|z|^{\zeta_\mu n v-1}=0$$

sein, woraus $\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\left(u_{\mu\nu}-\frac{\zeta_\mu n v}{t_\mu}\right)|z|^{u_{\mu\nu}}=0$ und damit $|z|=r_\mu(\sigma_\mu)^{1/v}$ im Sinne von (13) folgt. Somit wird

$$\beta_{\mu\varkappa}=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r_\mu(\sigma_\mu)^{1/v}}\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}z^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}}{z^{\varkappa+1}}dz\Bigg|\leq\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}r_\mu(\sigma_\mu)^{u_{\mu\nu}/v}\right)^{t_\mu}}{r_\mu(\sigma_\mu)^{\varkappa/v}}$$

$$=\frac{\tau_\mu(\sigma_\mu)^n}{r_\mu(\sigma_\mu)^{\left(\frac{\varkappa}{v}-\zeta_\mu\right)n}}\leq\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K'(\sigma_\mu)\varepsilon)},$$

letzteres wegen $\left|\frac{\varkappa}{v}-\zeta_\mu\right|\leq\varepsilon$. Folglich wird nach (19)

$$N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\leq 2\varepsilon n\,\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K'(\sigma_\mu)\varepsilon)}\quad\text{mit}\quad K'(\sigma_\mu)>0.$$

b 2) Sind $\lambda_{\mu 1},\ldots,\lambda_{\mu w_\mu}$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen, so seien $\lambda'_{\mu 1}=\lambda'(g_{\mu 1}),\ldots,\lambda'_{\mu w_\mu}=\lambda'(g_{\mu w_\mu})\geq 0$ rationale Zahlen derart, daß

$$|\lambda_{\mu\nu}-\lambda'_{\mu\nu}|<\varepsilon_1\qquad(0<\varepsilon_1<\varepsilon;\ \nu=1,\ldots,w_\mu)$$

ist. Dann folgt $\left|\sum_{i=1}^{t_\mu}\lambda(e_i)-\lambda'(e_i)\right|\leq t_\mu\varepsilon_1$ und damit, wenn N'_μ und τ'_μ mit den $\lambda'_{\mu\nu}$ entsprechend wie N_μ und τ_μ mit den $\lambda_{\mu\nu}$ definiert werden, nach Teil b 1)

$$N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\leq N'_\mu(t_\mu,n,2\varepsilon)\leq\tau'_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+2K'(\sigma_\mu)\varepsilon)}.$$

Da ferner $r_\mu(\sigma_\mu)$ und damit auch $\tau_\mu(\sigma_\mu)$ eine stetige Funktion der $\lambda_{\mu\nu}$ ist, wird für genügend kleines ε_1 sicher $\tau'_\mu(\sigma_\mu)\leq\tau_\mu(\sigma_\mu)^{1+\varepsilon}$ und somit

$$N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\leq\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+\varepsilon)(1+2K'(\sigma_\mu)\varepsilon)}\leq\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K(\sigma_\mu)\varepsilon)},$$

womit Hilfssatz 2 vollständig bewiesen ist.

Sei $R_n(\varepsilon)$ die Menge aller n-stelligen g-adischen Brüche $\varrho=0,e_1\ldots e_n$ mit

$$(\zeta_\mu-\varepsilon)\,n\leq S_\mu(\varrho,n)\leq(\zeta_\mu+\varepsilon)\,n\qquad(\mu=1,\ldots,m),\tag{20}$$

für die, wenn mit $t_\mu(\varrho)$ die Anzahl ihrer Ziffern aus $\mathfrak{G}_\mu$ bezeichnet wird, $\left(\frac{t_1(\varrho)}{n},\ldots,\frac{t_m(\varrho)}{n}\right)\in W\wedge H$ ist. Die Anzahl der Elemente von $R_n(\varepsilon)$ ist dann

$$N(n,\varepsilon)=\sum_{t_1,\ldots,t_m}\left(\frac{n!}{t_1!\ldots t_m!}\prod_{\mu=1}^{m}N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\right),\tag{21}$$

wobei über alle m-Tupel $(t_1, \ldots, t_m)$ mit $\left(\frac{t_1}{n}, \ldots, \frac{t_m}{n}\right) \in W \wedge H$ zu summieren ist. Denn bei festem t_μ gibt es $\frac{n!}{t_1! \ldots t_m!}$ Möglichkeiten, n Ziffernstellen in m Klassen von t_1 bzw. $t_2, \ldots, t_m$ Elemente zu unterteilen, und t_μ Stellen können auf $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon)$ Arten so besetzt werden, daß (20) für dieses μ erfüllt ist. Somit wird nach Hilfssatz 2

$$N(n, \varepsilon) \leq \sum_{t_1, \ldots, t_m} \left(\frac{n!}{t_1! \ldots t_m!} \prod_{\mu=1}^{m} \tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K(\sigma_\mu)\varepsilon)} \right).$$

Für irgendeinen Summanden $Q(t_1, \ldots, t_m; n)$ der rechten Seite erhält man, wenn man bei festen σ_μ den Grenzübergang $n \to \infty$ ausführt, nach der STIRLINGschen Formel

$$Q(t_1, \ldots, t_m; n) \leq \exp n \left(\sum_{\mu=1}^{m} \log \tau_\mu(\sigma_\mu) - \sum_{\mu=1}^{m} \sigma_\mu \log \sigma_\mu \right) \left(1 + \varepsilon \sum_{\mu=1}^{m} K(\sigma_\mu) + o(1) \right).$$

Somit ist, wenn der im Ziffernsatz auftretende Maximalwert δ für $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*)$ angenommen wird,

$$Q(t_1, \ldots, t_m; n) \leq g^{n\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))}, \quad \text{wo} \quad K^* = \sum_{\mu=1}^{m} K(\sigma_\mu^*) \text{ ist,}$$

und folglich

$$N(n, \varepsilon) < n^m g^{n\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))}.$$

Die Vereinigungsmenge aller Intervalle der Länge g^{-n}, deren linker Eckpunkt zu $R_n(\varepsilon)$ gehört, werde mit $V_n(\varepsilon)$ bezeichnet. Dann bildet offenbar $\bigvee_{l=n}^{\infty} V_l(\varepsilon)$ eine g^{-n}-Überdeckung von M, so daß man bei jedem positiven η für das $(\delta+\eta)$-dimensionale HAUSDORFFsche Maß $\{M\}^{\delta+\eta}$ für hinreichend kleines ε die Abschätzung

$$\{M\}^{\delta+\eta} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{N(l, \varepsilon)}{g^{l(\delta+\eta)}} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{g^{l\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))}\, l^m}{g^{n(\delta+\eta)}}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{g^{n\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))}}{g^{n(\delta+\eta)}} = 0$$

erhält, woraus (15) folgt.

5. Zum Abschluß des Beweises ist nun noch zu zeigen, daß

$$\dim M \geq \delta \tag{22}$$

ausfällt. Dazu setzen wir $\Sigma_\mu = \sum_{\nu=1}^{w_\mu} r_\mu (\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}$ und

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{r_\mu (\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}} \sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, w_\mu). \tag{23}$$

Dann ist $\sum_{\nu=1}^{w_\mu} \chi_{\mu\nu} = \sigma_\mu^*$ und daher wegen $\sum_{\mu=1}^{m} \sigma_\mu^* = 1$ offenbar $\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{w_\mu} \chi_{\mu\nu} = 1$. Bezeichnet man mit G die Menge der Zahlen ϱ, bei denen die g Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{\mu\nu}(\varrho, n)}{n} = \chi_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, w_\mu)$$

erfüllt sind, so wird für jedes $\varrho \in G$ nach (23) und (13)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_\mu(\varrho,n)}{n}=\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\chi_{\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}=\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}\lambda_{\mu\nu}=\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu^*}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}=\zeta_\mu,$$

also $G\subseteqq M$. Daher genügt der Nachweis, daß $\dim G=\delta$ ist. Dies folgt in der Tat aus Satz 1; denn es ist

$$\dim G=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\chi_{\mu\nu}\log\chi_{\mu\nu}}{\log\frac{1}{g}}=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}\log\left(\frac{r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\right)}{\log\frac{1}{g}}$$

$$=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\log\left(r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\sum_{\mu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}}\left(\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\right)^{\Sigma_\mu}\right)}{\log\frac{1}{g}},$$

und da nach (13)

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}}{\Sigma_\mu}=\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu^*}$$

ist, wird somit

$$\dim G=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sigma_\mu^*\log\left(r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu^*}}\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\right)}{\log\frac{1}{g}}$$

$$=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}(\sigma_\mu^*\log\Sigma_\mu-\log r_\mu(\sigma^*)^{\zeta_\mu}-\sigma_\mu^*\log\sigma_\mu^*)}{\log g}=\delta.$$

6. Als Ergänzung zum Ziffernsatz beweisen wir zwei Zusätze:

Zusatz 1. Setzt man $\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}=L_\mu$ $(\mu=1,\ldots,m)$, so ist das LEBESGUEsche Maß von M

$$\{M\}^1=\begin{cases}1, & \text{wenn } \zeta_\mu=\dfrac{L_\mu}{g} \quad \text{ist} \quad (\mu=1,\ldots,m)\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beweis. In der Bezeichnungsweise von Nr. 5 sei $\chi_{\mu\nu}=\frac{1}{g}$ für alle μ und ν. Für die zugehörige Menge G ist dann bekanntlich[8]) $\{G\}^1=1$, und da für jedes $\varrho\in G$ offenbar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_\mu(\varrho,n)}{n}=\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}\lim_{n\to\infty}\frac{A_{\mu\nu}(\varrho,n)}{n}=\frac{L_\mu}{g}$$

[8]) Siehe Teil II, Fußnote [1]).

ist, folgt $G \leqq M\left(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1); \frac{L_1}{g}, \ldots, \frac{L_m}{g}\right)$, so daß $\{M\}^1 = 1$ wird. Daher wird in allen anderen Fällen $\{M\}^1 = 0$.

Zusatz 2[9]**.** Im Falle $m = 1$ seien

$$M_1 = M_1(\mathfrak{G}; \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1); \zeta) \text{ und } M_2 = M_2(\mathfrak{G}; \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1); \zeta)$$

die Mengen der ϱ mit

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_1(\varrho, n)}{n} \leqq \zeta \quad \text{bzw.} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_1(\varrho, n)}{n} \leqq \zeta$$

sowie M die entsprechende Menge des Ziffernsatzes. Ist dann $0 \leqq \zeta < \frac{L_1}{g}$, so wird $\dim M_1 = \dim M_2 = \dim M$.

Beweis. Wegen $M \leqq M_1 \leqq M_2$ genügt der Nachweis von

$$\dim M_2 \leqq \dim M. \tag{24}$$

Diesen erhält man durch eine leichte Modifikation von Nr. 4: Die Definitionsgleichung (18) ist durch

$$\sum_{i=1}^{t_1} u(e_i) \leqq (\zeta + \varepsilon)\, n\, v \tag{18'}$$

zu ersetzen, so daß man statt (19)

$$N_1(t_1, n, \varepsilon) = \sum_{\varkappa=0}^{s} \beta_{1\varkappa} \quad \text{mit} \quad s = [(\zeta + \varepsilon)\, n\, v] \tag{19'}$$

erhält. Da $W \wedge H$ nur aus dem Punkt $\sigma_1 = 1$ besteht, wird wegen $\zeta < \frac{L_1}{g}$ nach (13) offenbar $r_1(\sigma_1) < 1$. Folglich wird

$$N_1(t_1, n, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r_1(\sigma_1)} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} z^{u_{\mu\nu}}\right)^n dz}{(1-z)\, z^{s+1}} \leqq \tau_1(1)^{n(1+K\varepsilon)},$$

und alle weiteren Betrachtungen von Nr. 4 bleiben sinngemäß erhalten, so daß sich (23) ergibt.

[9]) Für den Spezialfall $\lambda(j) = j$ $(j = 0, \ldots, g-1)$ wurde diese Aussage bei Eggleston a. a. O.[5]) mitbewiesen.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 22. Oktober 1953.)

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 434—454 (1954)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. II.

Von
WALTER NEUMER*).

Vorbemerkung.

Der erste Abschnitt dieser voraussichtlich fünf Abschnitte umfassenden Arbeit (zitiert als I, II usw.) erschien in dieser Z. **58**, 391—413 (1953) und enthält die §§ 1 bis 3. Der vorliegende zweite Abschnitt, bestehend aus den §§ 4 bis 6, verknüpft die in I rein konstruktiv eingeführten Symbole $V, I, I', I'', \ldots$ unter Verallgemeinerung des Operatorbegriffs mit beliebigen, d.h. im „naiven" Sinn aufgefaßten Ordnungszahlen und entwickelt einen entsprechenden Algorithmus, der zum Unterschied vom konstruktiven Algorithmus des ersten Abschnitts als „freier" Algorithmus bezeichnet wird, jedoch wiederum die Darstellung von Ordnungszahlen durch Zeichenfiguren zum Zweck hat; dabei müssen natürlich die nicht effektiv definierten Ordnungszahlen durch Variable wiedergegeben werden (§ 4). Sodann wird gezeigt, wie sich im freien Algorithmus aus den Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus schematische Normalformen für die Zahlen des Bereichs $[0, \vartheta V I I' I'' \ldots)$ gewinnen lassen (§§ 4, 5); anschließend wird nachgewiesen, daß dieser Bereich gegenüber den Operatoren des Algorithmus in gewissem Sinne abgeschlossen ist (§ 6).

Der dritte Abschnitt wird einige Rechenregeln und Beispiele für den Umgang mit dem Algorithmus bringen. Die in der Vorbemerkung zu I für II angekündigte Vergleichung des konstruktiven Algorithmus mit dem von ACKERMANN eingeführten Bezeichnungssystem für Ordnungszahlen wird erst in IV geschehen.

Die Numerierung der Paragraphen erfolgt durchgehend durch die ganze Arbeit; die Sätze, Formeln und Fußnoten werden in jedem Abschnitt neu numeriert.

2. Abschnitt.

Übertragung des Algorithmus auf beliebige Ordnungszahlen.

§ 4. Das Symbol $\alpha V I I' I'' \ldots$. — Die v-Normalformen.

1. Wir denken uns jetzt die Ordnungszahlen im Sinne CANTORs als Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen gegeben. 0 ist demnach die kleinste Ordnungszahl. — Mit λ soll immer eine Limeszahl bezeichnet werden. — Wir nehmen ferner eine hinreichend große reguläre (d.h. nur mit sich selbst konfinale) Ordnungszahl $P > \omega$ an und operieren im Bereich $[0, P)$[1]. — Sei

*) Herrn Prof. R. FURCH zum 60. Geburtstag gewidmet.

[1]) In einer geordneten Menge soll $[\alpha, \beta)$ das Intervall der Elemente γ mit $\alpha \leq \gamma < \beta$ bedeuten. Entsprechend $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, (α, β).

$\alpha^{(0)} > 0$ eine feste, $\alpha \geqq \alpha^{(0)}$ eine beliebige Zahl aus $[1, P)$ und V irgendein „Operator", den wir auf jedes $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ anwenden können mit dem Ergebnis, daß eine Zahl $\alpha V > \alpha$ entsteht, die wieder dem Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ angehört. Wir nennen V einen *Operator erster Stufe im Bereich* $[\alpha^{(0)}, P)$. Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, lassen wir den Zusatz „im Bereich ..." auch weg. Zwei Operatoren erster Stufe V und W im Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ gelten genau dann als gleich, $V = W$, wenn $\alpha V = \alpha W$ ist für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$[2]).

Beispiele. 1. $\alpha V = \alpha + 1$. 2. $\alpha V = \alpha + \omega$. 3. $\alpha V = \alpha \cdot \omega$. 4. $\alpha V = \alpha^2$. 5. $\alpha V = \alpha^\alpha$. — In diesen Beispielen kann man etwa $P = \omega_1$ wählen, aber auch gleich jeder beliebigen regulären Zahl $> \omega$. In 1., 2., 3. genügt es, $\alpha^{(0)} = 1$ zu setzen, während man in 4. und 5. $\alpha^{(0)} \geqq 2$ wählen muß.

6. Für $\alpha^{(0)} \geqq \omega$ erkläre man αV als die nächste auf α folgende Anfangszahl. Dann wird für $\alpha \in [\omega_\nu, \omega_{\nu+1}) : \alpha V = \omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+1} V = \omega_{\nu+2}$ usw. Hier wählt man P natürlich mindestens gleich der kleinsten regulären Anfangszahl mit Limeszahlindex.

Man sieht leicht ein, daß sich induktiv die folgenden Iterationen von V für beliebige „Exponenten" ν und λ aus $[0, P)$ definieren lassen

$$(1) \qquad \alpha V^{\nu+1} = (\alpha V^\nu) V, \quad \alpha V^\lambda = \lim_{\nu < \lambda} \alpha V^\nu \quad (\alpha V^0 = \alpha,\ \alpha V^1 = \alpha V),$$

und daß dabei $\alpha V^\beta < P$ für $\beta < P$ gilt. Somit ist V^β mit festem $\beta \in [1, P)$ wieder ein Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$.

Unter einem *Operator zweiter Stufe* J *in* $[\alpha^{(0)}, P)$ verstehen wir eine Vorschrift, welche aus einem beliebigen Operator erster Stufe V in $[\alpha^{(0)}, P)$ einen neuen Operator erster Stufe VJ in $[\alpha^{(0)}, P)$ macht derart, daß immer $\alpha V < \alpha V J < P$ gilt für $\alpha^{(0)} \leqq \alpha < P$. Der Operator J kann dabei von der Zahl α abhängen. — Zwei Operatoren J und $\bar{J}$ in $[\alpha^{(0)}, P)$ gelten als gleich, $J = \bar{J}$, wenn $\alpha V \bar{J} = \alpha V J$ ist für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und alle Operatoren erster Stufe V in $[\alpha^{(0)}, P)$. — Natürlich soll $\alpha V J = \alpha W J$ für $V = W$ sein.

Beispiele. 1. $\alpha V J = \alpha V^2$. 2. $\alpha V J = \alpha V^\alpha (\alpha > 1)$. — Das Beispiel 2. wird in III, § 8, 4 ausführlich behandelt. — Als weiteres Beispiel s. unten (3_1).

Durch Induktion bestätigt man wieder für alle ν und λ aus $[0, P)$ die Zulässigkeit der Definitionen

$$(2_1) \quad \alpha V J^{\nu+1} = \alpha (V J^\nu) J, \quad \alpha V J^\lambda = \lim_{\nu < \lambda} \alpha V J^\nu \quad (\alpha V J^0 = \alpha V,\ \alpha V J^1 = \alpha V J)$$

sowie daß stets $\alpha V J^\beta < P$ für $\beta < P$ ist. Bei festem $\beta \in [1, P)$ ist daher $V J^\beta$ bzw. J^β wieder ein Operator erster bzw. zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$.

Analog können wir *Operatoren* 3., 4., ..., $(n+2)$. *Stufe* definieren. Sind $V, J (= J_0), J_1, \ldots, J_n$ Operatoren 1., 2., 3., ..., $(n+2)$. Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, so ist $\alpha < \alpha V < \alpha V J < \alpha V J J_1 < \cdots < \alpha V J J_1 \ldots J_n < P$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$. In dem Symbol $\alpha V J \ldots J_n$ ist J_n auf J_{n-1} ausgeübt, $J_{n-1} J_n$ ein Operator $(n+1)$. Stufe auf J_{n-2} ausgeübt, ..., $J J_1 \ldots J_n$ ein Operator zweiter Stufe auf V und $V J \ldots J_n$ ein Operator erster Stufe auf α ausgeübt. — Die Gleichheit von

[2]) Die Gleichheit von Ordnungszahlen ist natürlich jetzt im üblichen Sinn der Mengenlehre gemeint.

Operatoren 3., 4., ... Stufe wird analog wie bei Operatoren erster und zweiter Stufe erklärt. Entsprechend wie (1) und (2_1) läßt sich die Iteration von J_n mit beliebigen Exponenten ν und λ aus $[0, P)$ begründen:

$$(2_{n+1})\begin{cases}\alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{\nu+1} = \alpha V J \dots (J_{n-1} J_n^{\nu}) J_n, \quad \alpha V J \dots J_n^{\lambda} = \lim\limits_{\nu<\lambda} \alpha V J \dots J_n^{\nu} \\ (\alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{0} = \alpha V J \dots J_{n-1}, \quad \alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n).\end{cases}$$

Es folgt wieder, daß $\alpha V J \dots J_n^{\beta} < P$ wird für $\beta < P$, so daß J_n^{β} bei festem $\beta \in [1, P)$ ebenfalls einen Operator $(n+2)$. Stufe darstellt.

Nun definieren wir die speziellen Operatoren 2., 3., ... Stufe $I (= I^{(0)})$, I', I'', ..., die zu jedem Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ und jedem Operator erster Stufe V darin passen, wie folgt [vgl. I, § 1, (3), (3') usw.].

$$(3_1) \qquad \alpha V I = \lim \left\{ \alpha V, \alpha V^{\alpha V}, \alpha V^{\alpha V^{\alpha V}}, \dots \right\}$$

$$(3_2) \qquad \alpha V J I' = \lim \left\{ \alpha V J, \ \alpha V J^{\alpha V J}, \ \alpha V J^{\alpha V J^{\alpha V J}}, \dots \right\}$$

$$(3_{n+1}) \quad \left\{ \alpha V J \dots J_{n-1} I^{(n)} = \lim \left\{ \alpha V J \dots J_{n-1}, \ \alpha V J \dots J_{n-1}^{\alpha V J \dots J_{n-1}}, \ \alpha V J \dots J_{n-1}^{\alpha V J \dots J_{n-1}^{\alpha V J \dots J_{n-1}}}, \dots \right\} \right.$$

Die Zulässigkeit dieser Definitionen ergibt sich aus dem Umstand, daß die Zahlen in den { } immer $< P$ bleiben, somit auch die betreffenden Limites. Daher gilt auch noch

$$(4) \qquad \alpha V I I' I'' \dots = \lim_{n<\omega} \alpha V I \dots I^{(n)} < P.$$

Satz 1. *$\alpha V I$ bzw. $\alpha V J \dots J_{n-1} I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ ist die kleinste kritische Zahl der Normalfunktion αV^{ξ} bzw. $\alpha V J \dots J_{n-1}^{\xi}$ von ξ, unter $V, J, \dots, J_{n-1}$ Operatoren 1., 2., ..., $(n+1)$. Stufe verstanden.*

Der Beweis ist trivial (man zeigt $\xi < \alpha V^{\xi}$ für $\xi < \alpha V I$ usw.).

2. Auf Grund der schematischen Definitionen (1), (2), (3) können wir aus den Zeichen ( ), $V, I, I', I'', \dots$ unter Verwendung von Variablen für Zahlen $< P$ und Benützung der Potenzschreibweise für Operatoren gewisse endliche Figuren herstellen, welche Zahlen $< P$ repräsentieren und die wir die *schematischen Zahlenfiguren* des *freien Algorithmus der Symbole* $V, I, I', \dots$ nennen. (Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, sprechen wir auch vom „freien Algorithmus" schlechthin.)

Beispiel. $\left(\alpha \left((V^{\beta})^{\gamma}\right) I^{\alpha_1 (V I)^{\beta_1 V I I'^{\gamma_1}}}\right) V (I I' I''^{\alpha_2})^{\beta_2} V$.

Eine solche schematische Zahlenfigur wollen wir mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen und verschiedene $\mathfrak{F}$ durch Indizes unterscheiden. Ein $\mathfrak{F}$ besteht demnach aus end-

lich vielen Zeichen ( ), $V, I, I', \ldots$ und endlich vielen Variablen $\alpha, \alpha_1, \ldots, \beta, \beta_1, \ldots$ usw. für Zahlen $< P$, welche *Zahlenvariable* heißen. Eine Variable darf auch mehrmals in $\mathfrak{F}$ auftreten (z. B. $\mathfrak{F} = \alpha(V^{\alpha}) I^{\beta V^{\beta}}$). Für die $\mathfrak{F}$ gilt wieder das Prinzip der Schreibung von links nach rechts wie im konstruktiven Algorithmus (vgl. I, § 2, 3). — *Zeichen oder Bezeichnungsweisen für Addition, Multiplikation und Potenzierung von Ordnungszahlen kommen in einem $\mathfrak{F}$ nicht vor.* Ersetzen wir einige oder alle Variable in $\mathfrak{F}$ durch individuelle Zeichen für Zahlen aus $[1, P)$ oder durch Formeln aus der Arithmetik der Ordnungszahlen wie $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, α^{β} u. ä., so sagen wir, die neue Zahlenfigur entstehe aus $\mathfrak{F}$ durch *Individualisierung*. αV^1 ist also kein $\mathfrak{F}$, wohl aber αV.

Eine Zahlenvariable in einem $\mathfrak{F}$ nennen wir *isoliert* an der Stelle wo sie steht, wenn sie daselbst nicht mit Operatorzeichen verknüpft ist; sie ist dann ein Exponent in $\mathfrak{F}$. Im obigen Beispiel sind $\beta, \gamma, \gamma_1, \alpha_2$ isoliert, $\alpha, \alpha_1, \beta_1, \beta_2$ nicht. Die nicht isolierten Variablen müssen also Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ bedeuten. Von den isolierten Variablen verlangen wir, daß sie Zahlen aus $[1, P)$ darstellen. — Die im Links-rechts-Sinne erste nicht isolierte Zahlenvariable der Figur $\mathfrak{F}$ nennen wir ihre *Ausgangsvariable*; links von ihr stehen, von linken Klammern „(" etwa abgesehen, keine weiteren Zeichen mehr. Im obigen Beispiel ist α die Ausgangsvariable. Jede andere nicht isolierte Variable von $\mathfrak{F}$ ist Ausgangsvariable einer größten Teilfigur $\mathfrak{F}_1$ von $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}_1$ ist wieder ein Exponent in $\mathfrak{F}$. Im genannten Beispiel ist α_1 die Ausgangsvariable des Exponenten $\alpha_1(VI)^{\beta_1 V I I' \gamma_1}$. Eine nicht isolierte Variable bezeichnen wir auch als *Kernvariable* (natürlich an der Stelle, wo sie steht; dieselbe Variable kann ja einmal isoliert und einmal als Kern auftreten; Beispiel: αV^{α}).

Mit $\mathfrak{F}(\alpha)$ bezeichnen wir ein $\mathfrak{F}$, in welchem sämtliche Kernvariable gleich α sind und α auch nicht mehr isoliert auftritt. Ersetzen wir in $\mathfrak{F}(\alpha)$ die Variable α durch ein individuelles Zahlzeichen $\vartheta \geqq \alpha^{(0)}$ (z. B. $\vartheta = 1$ für $\alpha^{(0)} = 1$ oder $\vartheta = \omega$ für $\omega \geqq \alpha^{(0)}$), dann bezeichnen wir die so entstehende individualisierte Figur wieder mit $\mathfrak{F}(\vartheta)$; in ihr können also nur noch isolierte Variable auftreten.

Einen Operator zweiter Stufe J nennen wir einen *Iterator erster Stufe*, wenn stets $\alpha V J \in \{\alpha V^{\nu}\}_{2 \leq \nu < P}$ ist. Ferner heiße ein Operator $(n+2)$. Stufe J_n ein *Iterator* $(n+1)$. *Stufe*, wenn stets $\alpha V J \ldots J_{n-1} J_n \in \{\alpha V J \ldots J_{n-1}^{\nu}\}_{\nu \leq 2 < P}$ gilt für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und jede Reihe $V, J, \ldots, J_{n-1}$ von Operatoren 1., 2., …, $(n+1)$. Stufe in diesem Bereich. — $I, I', I'', \ldots$ sind offenbar Iteratoren 1., 2., 3., … Stufe in jedem Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$. — Ist J ein Iterator erster Stufe, β eine Zahl aus $[1, P)$, so ist auch J^{β} ein Iterator erster Stufe. Ist ferner J_1 ein Iterator zweiter Stufe, so ist $J J_1$ wieder ein Iterator erster Stufe. Entsprechend für Iteratoren höherer Stufe. — Ist α die Ausgangsvariable von $\mathfrak{F}$, so gilt $\mathfrak{F} \in \{\alpha V^{\nu}\}_{1 \leq \nu < P}$.

Wählen wir $\alpha V = \alpha\omega$ und $\alpha^{(0)} = 1$, $P = \omega_1$, so ist klar, daß wir in dem hiermit festgelegten freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ unter anderem die sämtlichen Zahlenfiguren aus den Zeichen $1, (\,), V, I, I', \ldots$ (ohne $+$-Zeichen) bilden können, die im konstruktiven Algorithmus von I möglich sind.

Aber darüber hinaus lassen sich im freien Algorithmus noch Figuren herstellen, die im konstruktiven Algorithmus auf Grund der Konstruktionsprinzipien I und II (**I**, § 1, **3**) verboten waren und die trotzdem nur Zahlen $< 1VII'I''\ldots$ darstellen. Hierbei kann dieselbe Zahl unter Umständen auf unendlich viele Weisen geschrieben werden, z. B. $1VI = 1^{1VI} = 1^{1^{1VI}} = \cdots$. Nehmen wir noch das $+$-Zeichen hinzu, so lassen sich unter anderem sämtliche Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus wiedergewinnen, wobei, wie wir in § 5, **5** sehen werden, die regulären Zahlenfiguren die Rolle von Normalformen für die Zahlen des durch $1VII'I''\ldots$ bestimmten Abschnitts der zweiten Zahlenklasse übernehmen.

3. Wir kehren zurück zum allgemeinen Fall eines beliebigen Bereichs $[\alpha^{(0)}, P)$ und eines beliebigen Operators erster Stufe V, den wir von jetzt ab festgehalten denken. Desgleichen wählen wir eine bestimmte Zahl $\vartheta \in [\alpha^{(0)}, P)$, die wir ebenfalls festhalten und von der aus wir den Algorithmus beginnen. Auch jetzt besteht eine Entsprechung zwischen den Zahlenfiguren des konstruktiven und gewissen Zahlenfiguren des freien Algorithmus, die wir im folgenden darstellen wollen.

Zu dem Zweck betrachten wir im konstruktiven Algorithmus zunächst diejenigen vollregulären Zahlenfiguren, welche nur aus den Zeichen 1, ( ), $V, I, I', \ldots$ bestehen, also ohne Verwendung des $+$-Zeichens gebildet sind[3]). Ersetzen wir in diesen Figuren überall 1 durch ϑ, so erhalten wir Zahlenfiguren $\mathfrak{F}(\vartheta)$ des freien Algorithmus, die in denselben Größenbeziehungen zueinander stehen wie die entsprechenden des konstruktiven Algorithmus, aber im allgemeinen ganz andere Ordnungszahlen darstellen, selbst wenn $\vartheta = 1$ ist. Die Gesamtheit der so gewonnenen speziellen $\mathfrak{F}(\vartheta)$ nennen wir das *Gerüst* der Menge $M(\vartheta) = [1, \vartheta VII'I''\ldots)$.

Mit dem Gerüst sind aber nicht alle Zahlen aus $M(\vartheta)$ erfaßt, ausgenommen den Fall, daß $\vartheta = 1$ und $\alpha V = \alpha + 1$ ist für $\alpha \in [1, P)$ [4]). Um auch bei beliebig großem ϑ und beliebig „starkem" V schematische Normalformen für die Zahlen aus $M(\vartheta)$ angeben zu können, bedienen wir uns gewisser Variabler x_i und v_j, die insbesondere in dem hauptsächlich vorauszusetzenden Fall zweckmäßig sind, wo zwischen α und αV immer unendlich viele Zahlen liegen.

Es bedeute x eine Zahl zwischen 1 und ϑV, $\alpha\, v$ eine Zahl zwischen α und αV. v ist natürlich kein Operator, es sei denn, V wäre durch $\alpha V = \alpha + 2$ erklärt. Verschiedene Variable x bzw. v unterscheiden wir durch untere oder obere Indizes. — Für zwei mit derselben Zahl α kombinierte Variable v_1, v_2 definieren wir die Relationen $v_1 = v_2$, $v_1 < v_2$, $v_1 \leqq v_2$ als Abkürzung für die

[3]) Sie haben die Eigenschaft, daß es zu jeder genau eine Hilfsfigur gibt, welche also die Form $\lim_n \alpha_n$ hat; diese Eigenschaft ist aber nicht charakteristisch, denn z. B. $1V^2 + 1V$ hat sie auch.

[4]) Dann wird nämlich $1V = 2$, $1^{1V} = (1V)V = 3$, $1^{1^{1V}} = 1^{(1V)V} = \left(1^{1V}\right)V = 4$ usw., $1VI = \omega$, allgemein $\alpha V^\beta = \alpha + \beta$, $\alpha VI = \alpha\omega$. Auf den so erklärten Grundoperator V läßt sich ebenfalls ein konstruktiver Algorithmus aufbauen; näheres s. **III**, § 7, **4**.

Relationen $\alpha v_1 = \alpha v_2$, $\alpha v_1 < \alpha v_2$, $\alpha v_1 \leqq \alpha v_2$. Im Fall $v_1 = v_2$ dürfen v_1 und v_2 miteinander ausgetauscht werden. — $v_1 \neq v_2$ soll bedeuten, daß entweder v_1 und v_2 mit derselben Zahl α verknüpft sind und $\alpha v_1 \neq \alpha v_2$ gilt oder daß v_1 mit α, v_2 mit β verknüpft ist und $\alpha \neq \beta$ gilt, wobei es nicht darauf ankommt, ob $(\alpha, \alpha V) \cap (\beta, \beta V)$ leer ist oder nicht.

Wir zeigen im nächsten Paragraphen, daß sich jede Zahl aus $M(\vartheta)$ *formal* (nicht „effektiv") als eine endliche Figur aus den Zeichen ϑ, ( ), V, I, I', I'', ... und einer Reihe von Variablen x_1, x_2, ..., v_1, v_2, ... schreiben läßt. Zur Vorbereitung gehen wir wieder von den vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus aus. In diesem hat eine transfinite Zahl nach **I**, § 3, **3** die Form

$$\eta = \chi_1 q_1 + \chi_2 q_2 + \cdots + \chi_k q_k + r, \tag{5}$$

wo die χ_i mit wachsendem i abnehmende Hauptzahlen sind (s. **I**, § 1, **5**, erster Absatz) und die q_i sowie r natürliche Zahlen; es kann $k = 1$ sein und r fehlen; ein $q_i = 1$ wird nicht hingeschrieben. χ_1 möge aus den Zeichen 1, +, ( ), V, I, ..., $I^{(n)}$ bestehen, also eine $I^{(n)}$-Zahl mit dem Anfang $1VI \ldots I^{(n)}$ sein (**I**, § 2, **3**); dann besteht auch η aus diesen Zeichen. (Das entsprechende gilt, wenn χ_1 eine V- oder I-Zahl ist.) η ist eine „zweidimensionale" Figur (**I**, § 1, **1**, erster Absatz); eine Reihe von Zeichen steht auf der ersten oder Grundzeile; dann folgen in der zweiten Zeile die zu gewissen Zeichen oder durch ( ) zusammengefaßten Zeichengruppen der ersten Zeile „rechts hoch" gestellten Zeichen, dann in der dritten Zeile die zu Zeichen oder Zeichengruppen der zweiten Zeile rechts hoch gestellten Zeichen usw. Als *Exponenten p. Stufe* von η bezeichnen wir diejenigen in η auftretenden Exponenten, deren Grundzeilen in der $(p+1)$. Zeile von η enthalten sind $(p = 1, 2, \ldots)$.

Die Zahlenfigur η in (5) heiße *n-zeilig* $(n = 1, 2, \ldots)$, wenn sie n Zeilen aufweist; für $n > 1$ enthält sie dann Exponenten bis einschließlich $(n-1)$. Stufe [5]).

Der Begriff der Zeilenanzahl existiert natürlich bei allen „zweidimensionalen" Figuren, die nach den Regeln der Potenzschreibweise aus Einzelzeichen gebildet sind (eine Variable mit Indizes gilt als Einzelzeichen). Diese Figuren weisen eine Links-rechts-Struktur auf, d.h. es stehen niemals zwei Zeichen in derselben Vertikalen. Das im Links-rechts-Sinne erste Zeichen bestimmt die Grundzeile, die zugleich die unterste Zeile ist. Von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Zeichen steht das zweite entweder auf derselben Zeile wie das erste oder eine Zeile höher oder eine oder mehrere Zeilen tiefer. Ein „Exponent" ist eine größte Teilfigur von derselben Art wie die Gesamtfigur, deren Grundzeile nicht in der Grundzeile der Gesamtfigur liegt. — Die bisher und die noch zu definierenden Figuren gehören zu dieser Gattung.

4. Jeder vollregulären Zahlenfigur η des konstruktiven Algorithmus ordnen wir jetzt ein Schema $f_\vartheta(\eta)$ als eine sog. *v-Normalform* des freien Algorithmus zu, das zunächst für den Fall $\vartheta = 1$ definiert wird. — Für eine natürliche

[5]) Die Zeilenanzahl ist nicht mit der Stockwerksanzahl (I, § 3) zu verwechseln; $1V^{1+1}$ ist zweizeilig aber einstöckig, $1VI^{1V^{1+1}}$ ist dreizeilig aber I-einstöckig.

Zahl $n = 1 + 1 + \cdots + 1 > 1$ sei $f_1(n) = x$. — Ist χ eine einzeilige Hauptzahl, so besteht sie nur aus den Zeichen 1, ( ), V, I, ..., $I^{(n)}$ bzw. 1, ( ), V, je nachdem sie eine $I^{(n)}$- oder V-Zahl ist, wobei 1 nur einmal und zwar als das erste Zeichen auftritt, das keine linke Klammer ist. Wir setzen dann $f_1(\chi) = \chi$. Ist η eine einzeilige Zahl der Form (5) mit $\eta > \chi_1$, so sei $f_1(\eta) = f_1(\chi_1)v = \chi_1 v$.

Seien nun die $f_1(\eta)$ für alle 1- bis $(n-1)$-zeiligen vollregulären Zahlenfiguren η des konstruktiven Algorithmus definiert als endliche Figuren aus den Zeichen 1, ( ), V, I, I', I'', ... und gewissen Variablen $x_1, x_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$, wobei keine Variable zweimal vorkommen soll. Sei χ eine n-zeilige Hauptzahl; ihre (etwa von links nach rechts gezählten) Exponenten erster Stufe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ (die nicht alle verschieden zu sein brauchen) sind dann höchstens $(n-1)$-zeilig [wenigstens einer ist $(n-1)$-zeilig], und wir können ihre v-Normalformen $f_1(\varepsilon_i)$ angeben, wobei wir es mittels der nötigen Zahl von Indizes so einrichten, daß $f_1(\varepsilon_i)$ und $f_1(\varepsilon_j)$ für $i \neq j$ keine Variable x oder v gemein haben. Dann erklären wir $f_1(\chi)$ als die Figur, die sich aus χ ergibt, indem wir $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ durch $f_1(\varepsilon_1), \ldots, f_1(\varepsilon_q)$ ersetzen. In $f_1(\chi)$ kommt wieder keine Variable zweimal vor. — Ist endlich η eine n-zeilige Zahlenfigur der Form (5) mit $\eta > \chi_1$, so setzen wir $f_1(\eta) = f_1(\chi_1)v_k$, wo k etwa der erste Index ist, der bei den in $f_1(\chi_1)$ auftretenden v nicht vorkommt.

Damit haben wir zu allen vollregulären η des konstruktiven Algorithmus die v-Normalform $f_1(\eta)$ definiert. Natürlich ist es gleichgültig, wie die in $f_1(\eta)$ auftretenden Variablen x und v numeriert bzw. voneinander unterschieden werden. — Ist η n-zeilig, so ist $f_1(\eta)$ höchstens n-zeilig. — $f_\vartheta(\eta)$ erhalten wir nun aus $f_1(\eta)$ einfach dadurch, daß wir 1 durch ϑ ersetzen. Endlich definieren wir

$$f_\vartheta(1) = 1. \tag{6}$$

Beispiel. $\eta = \Big(1\Big(\big(VII'^{\,1V^{1+1}}(1+1)\big)II'^{1+1}\Big)I^{1V}\Big)V^{1VI} + 1VII'$,

$$f_\vartheta(\eta) = \Big(\vartheta\Big(\big(VII'^{\,\vartheta V^{x_1}v_1}\big)II'^{x_1}\Big)I^{\vartheta V}\Big)V^{\vartheta VI}{}_{v_2}\ ^{6}).$$

Allgemein gilt: In der Grundzeile von $f_\vartheta(\eta)$ kommt kein x und höchstens ein v vor; dieses v ist dann das (von links gesehen) letzte Zeichen in $f_\vartheta(\eta)$. Ferner erscheint in keinem $f_\vartheta(\eta)$ eine Kombination $x\,v$ oder ϑv.

Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir statt f_ϑ einfach f.

Die v-Normalformen $f_\vartheta(\eta)$ können wir insbesondere bilden für $\vartheta = 1$ und den durch $\alpha V = \alpha\omega$ erklärten Operator V. Dann ist der freie Algorithmus durch denselben Grundoperator und dieselbe Ausgangszahl bestimmt wie der konstruktive, so daß $f_1(\eta)$ die als Wohlordnungstypus aufgefaßte Zahl η selbst darstellen kann. Ist nun η eine Zahlenfigur der Form (5), so bestehen nach I, § 3 für die Exponenten erster Stufe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ von χ_1 gewisse Ungleichungen, welche sich auf die Exponenten erster Stufe $f_1(\varepsilon_1), \ldots, f_1(\varepsilon_q)$ von $f_1(\chi_1)$ übertragen.

[6]) Das Zeichen v fügen wir der Zahlenfigur, auf die es sich bezieht, ohne deren vorherige Einschließung in ( ) an. — Auf Grund der Festsetzung (6) könnten wir auch Exponenten 1 in den η sowie $f_\vartheta(\eta)$ zulassen.

Beispiel. $\chi_1 = \big((1\,(V I^{\alpha_1})^{\beta_1})\,(V I^{\alpha_2})^{\beta_2}\big)\,V^{\gamma} = \varphi V^{\gamma}$; dabei gilt

$$1VII' > \alpha_1 > \alpha_2, \quad \beta_1 < 1VI^{\alpha_1+1}, \quad \beta_2 < \big(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)\,VI^{\alpha_2+1}, \quad \gamma < \varphi VI.$$

Also wird, wenn wir f statt f_1 schreiben:

$$f(\chi_1) = \big(f(\varphi)\big)\,V^{f(\gamma)} = \big((1\,(VI^{f(\alpha_1)})^{f(\beta_1)})\,(VI^{f(\alpha_2)})^{f(\beta_2)}\big)\,V^{f(\gamma)},$$

wobei

$$1VII' > f(\alpha_1) > f(\alpha_2), \qquad f(\beta_1) < 1VI^{f(\alpha_1)+1},$$

$$f(\beta_2) < \big(1\,(VI^{f(\alpha_1)})^{f(\beta_1)}\big)\,VI^{f(\alpha_2)+1}, \qquad f(\gamma) < \big(f(\varphi)\big)\,VI \quad . \text{ ist.}$$

Wenn φVI nicht vollregulär ist, also vollständige Hilfsfigur, nämlich im Fall $\alpha_2 = 1$, ist $\big(f(\varphi)\big)\,VI$ kein $f(\eta)$; die oberen Schranken für $f(\beta_1)$ und $f(\beta_2)$ sind es ebenfalls nicht, da sie ein $+$-Zeichen enthalten.

Für die Exponenten erster Stufe jedes mehrzeiligen $f_1(\varepsilon_i)$ gibt es wieder die entsprechenden Ungleichungen usw. Das Gesamtsystem dieser Ungleichungen für die Exponenten von $f_1(\chi_1)$ oder, was dasselbe ist, von $f_1(\eta)$, übernehmen wir nun — zunächst rein schematisch — für die $f_\vartheta(\eta)$ im allgemeinen Fall (wo im freien Algorithmus ϑ eine Zahl aus einem beliebigen Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ und V einen beliebigen Operator erster Stufe darin bedeutet), indem wir die Kernzeichen 1 überall durch ϑ ersetzen[7]).

Unter einer v-Normalform des freien Algorithmus der Operatoren $V, I, I', I'', \ldots$ mit der Ausgangszahl ϑ verstehen wir daher von jetzt ab ein Schema $f_\vartheta(\eta)$ oder kürzer $f(\eta)$ zusammen mit den vorstehend beschriebenen Ungleichungen für seine Exponenten.

Zu einer bestimmten v-Normalform gehören im allgemeinen unendlich viele vollreguläre Zahlenfiguren η des konstruktiven Algorithmus, denen sie zugeordnet ist. So gilt im Sinn der figürlichen Einerleiheit $f\big(1V(1+1)\big) = f\big(1V(1+1+1)\big) = \cdots = \vartheta V v$. Wenn man will, kann man diesem Umstand abhelfen, indem man stets das kleinstmögliche η wählt, was für jede bestimmte v-Normalform sicherlich ein konstruktiv lösbares Problem ist. Für $\vartheta V v$ z.B. ist $\eta = 1V+1$ das kleinste η mit $f(\eta) = \vartheta V v$. — Ebenso können mehrere, im allgemeinen unendlich viele Zahlen aus $M(\vartheta)$ durch dieselbe v-Normalform dargestellt werden (§ 5). Gegebenenfalls müssen wir gleiche v-Normalformen, welche verschiedene Zahlen darstellen sollen, durch zusätzliche Kennzeichnung ihrer Variablen x und v unterscheiden.

§ 5. Darstellung der Zahlen aus $M(\vartheta)$ durch Normalformen.

1. In Ziffer **1** bis **4** dieses Paragraphen wollen wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 2. *Jede Zahl α aus $M(\vartheta)$ läßt sich eindeutig in einer v-Normalform $f_\vartheta(\eta)$ darstellen; insbesondere ist η eine V-, I-, …, $I^{(n)}$-Zahl, wenn α aus $[\vartheta V, \vartheta VI), [\vartheta VI, \vartheta VII'), \ldots, [\vartheta VI \ldots I^{(n)}, \vartheta VI \ldots I^{(n+1)})$ entnommen ist. — Unter der Voraussetzung, daß zwischen α und αV für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ stets unendlich viele*

[7]) Mit „Kernzeichen" ist die sinngemäße Verallgemeinerung von „Kernvariable" (vgl. **2**) gemeint.

Zahlen liegen[8]*), stellt umgekehrt $f_\vartheta(\eta)$ für jedes vollreguläre η Zahlen aus $M(\vartheta)$ dar, insbesondere, wenn η eine V-, I-, ..., $I^{(n)}$-Zahl ist, Zahlen aus $[\vartheta V, \vartheta VI)$, $[\vartheta VI, \vartheta VII')$, ..., $[\vartheta VI \dots I^{(n)}, \vartheta VI \dots I^{(n+1)})$.*

Vorstehenden Satz bestätigen wir zunächst für die Zahlen $<\vartheta V$ und die Zahlen aus $[\vartheta V, \vartheta VI)$. Die Darstellung eines $\alpha<\vartheta V$ $(\alpha>0)$ ist 1 oder x. — Sei nun $\alpha\in[\vartheta V, \vartheta VI)$. Dann gibt es nach Satz 1 ein $\alpha_1<\vartheta VI$ mit $\vartheta V^{\alpha_1}\leqq\alpha<\vartheta V^{\alpha_1+1}$, wobei $\alpha_1<\alpha$. Also ist $\alpha=\vartheta V^{\alpha_1}$ oder $\alpha=\vartheta V^{\alpha_1}v$. Nun kann $\alpha_1=1$ oder $=x$ oder $\geqq\vartheta V$ sein. Im letzteren Fall finden wir $\alpha_1=\vartheta V^{\alpha_2}$ oder $\alpha_1=\vartheta V^{\alpha_2}v$ mit $\alpha_2<\alpha_1$. So können wir fortfahren, aber nach endlich vielen Schritten muß die Reihe $\alpha_1>\alpha_2>\cdots$ mit einem $\alpha_n=x$ oder $\alpha_n=1$ abbrechen. Indem wir die nacheinander auftretenden v noch mit Indizes versehen, erhalten wir die folgende $(n+1)$-zeilige Figur als eindeutige formale Darstellung einer Zahl aus $[\vartheta V, \vartheta VI)$:

$$\alpha=\vartheta V^{\vartheta V^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\vartheta V^{x}v_n}}}}v_2}v_1. \tag{7}$$

Hierin kann x fehlen (d.h. wenn $\alpha_n=1$, wie im Fall $\vartheta=1$, $\vartheta V=2$; α ist dann n-zeilig) oder es können (eventuell zugleich mit x) einige oder alle v_i fehlen (wie prinzipiell im Fall, wo $\xi V=\xi+1$ für $\xi\in[\alpha^{(0)}, P)$).

Aus **I**, § 3, **1** entnimmt man nun ohne weiteres, daß das Schema (7) immer eine v-Normalform ist und daß, unter η eine vollreguläre V-Zahl des konstruktiven Algorithmus verstanden, $f_\vartheta(\eta)$ immer die Form (7) hat sowie eine Zahl aus $[\vartheta V, \vartheta VI)$ darstellt, wenn $\vartheta V>2$ und $(\xi, \xi V)$ niemals leer ist.

2. Jetzt betrachten wir ein $\alpha\in[\vartheta VI, \vartheta VII')$. Nach Satz 1 gibt es ein α_1 mit

$$\vartheta VI^{\alpha_1}\leqq\alpha<\vartheta VI^{\alpha_1+1}, \qquad 1\leqq\alpha_1<\alpha. \tag{8_1}$$

Wegen $\vartheta VI^{\alpha_1+1}=\vartheta(VI^{\alpha_1})I$ gibt es wieder nach Satz 1 ein β_1, so daß

$$\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\leqq\alpha<\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1+1}, \qquad 1\leqq\beta_1<\vartheta VI^{\alpha_1+1} \tag{8_2}$$

gilt. Nun ist $\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1+1}=\left(\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_1}$; also existiert ein α_2, so daß die Ungleichungen

$$\left(\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2}\leqq\alpha<\left(\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2+1}, \quad 1\leqq\alpha_2<\alpha_1 \tag{8_3}$$

bestehen, wofern nicht $\alpha<\left(\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI$ ist, welchen Fall wir einstweilen zurückstellen, da wir zuletzt doch auf sein allgemeines Analogon stoßen. Von (8_3) schließt man auf das Vorhandensein eines β_2 mit

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)(VI^{\alpha_2})^{\beta_2}\leqq\alpha<\left(\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)(VI^{\alpha_2})^{\beta_2+1},\\ \text{wo}\\ \qquad 1\leqq\beta_2<\left(\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2+1}.\end{array}\right. \tag{8_4}$$

So können wir fortfahren, α einzuschachteln, wobei die oberen Schranken niemals zu-, wohl aber regelmäßig abnehmen, mindestens bei jedem Über-

[8]) Das heißt, daß durch $\alpha\, v$ immer unendlich viele Zahlen dargestellt werden.

gang von einer Relation (8_{2i-1}) zu einer Relation (8_{2i}) $(i = 1, 2, \ldots)$. Der Prozeß muß daher nach endlich vielen Schritten damit abbrechen, daß wir entweder zu einer unteren Schranke gelangen, die gleich α ist oder zu einer solchen, welche nicht mehr durch einen Operator $(V I^{\alpha_i})^{\beta_i}$ vergrößert werden kann, ohne daß die Zahl α übertroffen wird[9]). Im ganzen werden wir dann folgende Einschließung für α erreicht haben:

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi \leqq \alpha < \varphi V I, \quad \text{wo} \quad \varphi = \big(\ldots\big((\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1})(V I^{\alpha_2})^{\beta_2}\big)\ldots\big)(V I^{\alpha_m})^{\beta_m} \\ \text{mit } m \geqq 1 \text{ und} \\ \qquad \vartheta V I I' > \alpha_1 > \cdots > \alpha_m \geqq 1, \quad 1 \leqq \beta_1 < \vartheta V I^{\alpha_1+1}, \ldots, \\ \qquad\qquad 1 \leqq \beta_m < \big(\ldots(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots\big) V I^{\alpha_m+1}. \end{cases}$$

Nach Satz 1 läßt sich die Einschließung (9) verfeinern zu

$$(10)\quad \chi = \varphi V^{\gamma} \leqq \alpha < \varphi V^{\gamma+1}, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \gamma < \varphi V I \quad (\varphi \text{ siehe (9)}).$$

Somit gelangen wir zu einer Darstellung

$$(11)\quad \alpha = \varphi V^{\gamma} v \quad (\varphi \text{ siehe (9); } v \text{ kann fehlen}).$$

Das System der Exponenten α_i, β_i, γ ist eindeutig durch die Zahl $\chi = \varphi V^{\gamma}$ bestimmt und umgekehrt, wobei χ ihrerseits durch α festgelegt ist. Somit können wir das Exponentensystem als Funktion von α auffassen:

$$(12)\quad g(\alpha) = \big((\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m), \gamma\big).$$

Diejenigen unter den Exponenten „erster Stufe" in (12), welche $\geqq \vartheta V I$ sind, haben wieder die Form (11), während die Exponenten $< \vartheta V I$ die in **1** geschilderte Form aufweisen. Dasselbe gilt für die Exponenten „zweiter Stufe", so weit sie vorhanden (d.h. > 1) sind usw. Dieser Aufstieg zu Exponenten „höherer Stufe" muß aber nach endlich vielen Schritten ein Ende nehmen. Das folgt aus dem nachstehenden

Hilfssatz 1. (*Rekursionssatz.*) *Jeder Ordnungszahl* $\alpha \in [\xi, \eta)$, $\xi < \eta$, *sei ein endliches geordnetes System von Ordnungszahlen* $g(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *zugeordnet, wobei* $\alpha_i < \alpha$ *ist für* $i = 1, \ldots, n$ *und* n *von* α *abhängen kann. Die* α_i *mögen die Exponenten erster Stufe von* α *heißen, die Exponenten erster Stufe derjenigen* α_i, *die* $\geqq \xi$ *sind, die Exponenten zweiter Stufe von* α *usw. Dann gibt es eine natürliche Zahl* q, *so daß alle Exponenten* q. *Stufe* $< \xi$ *sind.*

Beweis. Sei $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ die gemäß $>$ geordnete Menge der verschiedenen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. In die Menge

$$(13)\quad \alpha > \beta_1 > \cdots > \beta_m$$

[9]) Dies wird hier außerdem durch den Regreß $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ bewirkt. Aber schon im nächsthöheren Fall der Zahlen $\alpha \in [\vartheta V I I', \vartheta V I I' I'')$ kann man sich ohne Weitläufigkeiten nur noch auf das regelmäßige Kleinerwerden der oberen Einschließungsschranken für α stützen.

fügen wir die verschiedenen Exponenten zweiter Stufe von α gemäß der Relation $>$ ein, so weit sie vorhanden sind und noch nicht in (13) vorkommen. Es entstehe die Menge

$$(13_1) \qquad \alpha > \beta_1 > \beta_1' > \beta_2' > \cdots > \beta_{m'}';$$

β_1' tritt höchstens als Exponent zweiter Stufe auf. Die Exponenten dritter Stufe sind also $< \beta_1'$ und ihre Einschiebung in (13_1) führt zu einer Menge

$$(13_2) \qquad \alpha > \beta_1 > \beta_1' > \beta_2'' > \beta_3'' > \cdots > \beta_{m''}'';$$

β_2'' kann höchstens als Exponent dritter Stufe vorkommen, so daß die Exponenten vierter Stufe sämtlich $< \beta_2''$ sind usw. Wir erhalten so eine Reihe abnehmender Zahlen $\beta_i^{(i)}$, die mit einem $\beta_p^{(p)}$ abbrechen muß; $\beta_i^{(i)}$ stellt höchstens einen Exponenten $(i+1)$. Stufe dar und alle Exponenten $(i+2)$. Stufe sind $< \beta_i^{(i)}$. Exponenten $(p+2)$. Stufe kann es nicht geben, da sonst noch ein $\beta_{p+1}^{(p+1)}$ aufzuschreiben wäre. Also sind alle Exponenten $(p+1)$. Stufe $< \xi$.

Um den Hilfssatz auf unser Problem anzuwenden, setzen wir $\xi = \vartheta V I$, $\eta = \vartheta V I I'$ und wählen $g(\alpha)$ als die Funktion (12). Dann ergibt sich, daß von einer gewissen Stufe ab alle Exponenten in dem für α gewonnenen Schema unterhalb $\vartheta V I$ liegen, so daß wir sie nach **1** durch ihre v-Normalformen ersetzen können. Somit erscheint α in der Tat eindeutig als endliche Figur aus den Zeichen ϑ, V, I, ( ) und gewissen Variablen x_i, v_j dargestellt, wenn wir die Exponenten **1** weglassen.

3. Die Analogie der in **1** und **2** gewonnenen Formeln mit den in **I**, § 3, **1**, **2** hergeleiteten liegt auf der Hand. Sie wird verständlich, wenn wir bemerken, daß wir auch in der konstruktiven Analyse der Form der vollregulären Zahlenfiguren, wie sie in **I**, § 3 durchgeführt bzw. angedeutet wurde, die Variablen x und v hätten verwenden können. Denn es ist einerlei, ob man für die Zahlen zwischen 1 und $1V$, d.h. die Zahlen $1+1+\cdots+1$, die Variablen n oder x benützt, und ebenso kann man, unter χ eine Hauptzahl verstanden, für die vollregulären Zahlen zwischen χ und χV das Symbol χv als „Variable" einführen. Dann aber gelangen wir durch die konstruktive Analyse „in erster Näherung" zu schematischen Darstellungen von derselben Form wie in **1** und **2**, wenn noch ϑ durch 1 ersetzt wird, und wir können nun von der konstruktiven „v-Darstellung" aus zur additiven Konstruktion und damit zu den Darstellungen **I**, § 3, (20), (21) nebst den zugehörigen Betrachtungen fortschreiten. Übrigens ist die konstruktive v-Darstellung einer Zahlenfigur η nichts anderes als die ihr zugeordnete Normalform $f_1(\eta)$.

Bleiben wir indessen bei der v-Darstellung stehen, so lassen sich für sie auch im konstruktiven Algorithmus Kriterien für die Größenvergleichung zweier Zahlen entwickeln, die vollkommen analog im freien Algorithmus gelten. Es genügen folgende Andeutungen: Sind $\alpha = \chi v_1$ und $\alpha' = \chi' v_1'$ zwei Zahlen der Form (7) oder (11), so gilt $\alpha < \alpha'$ entweder wenn $\chi < \chi'$ oder wenn $\chi = \chi'$ und $v_1 < v_1'$ ist (vgl. die Festsetzungen in § 4, **3** hinsichtlich der Variablen v). Sind ferner χ und χ' zwei Zahlen der Form (10) [oder **I**, § 3, (23)], so gelten für

$\chi < \chi'$ auch im freien Algorithmus die in I, § 3, **2** angegebenen Kriterien. Aus diesen läßt sich dann wieder ein rekursives Verfahren zur Vergleichung zweier in v-Darstellung gegebener Zahlen α, α' aus $[\vartheta VI, \vartheta VII')$ des freien oder des konstruktiven Algorithmus $(\vartheta = 1)$ entwickeln. — Die Vergleichung zweier Zahlen α, α' aus $[\vartheta V, \vartheta VII')$ führt im allgemeinen auf gewisse Relationen zwischen den Variablen x, v von α und x', v' von α', die für je zwei betroffene $x_i, x'_{i'}$ bzw. $v_j, v'_{j'}$ eine der Formen haben:

$$x_i = x'_{i'}; \quad x_i \leqq x'_{i'}; \quad x_i < x'_{i'} \quad \text{bzw.} \quad v_j = v'_{j'}; \quad v_j \leqq v'_{j'}; \quad v_j < v'_{j'}.$$

Es kann aber auch vorkommen, daß gar keine Bindungen zwischen den x, v und den x', v' resultieren.

Beispiele. 1. $\alpha = \vartheta V^x v$, $\alpha' = \vartheta V^{x'} v'$; $\alpha < \alpha'$ ist gleichwertig mit $x < x'$ oder mit $x = x', v < v'$. 2. $\alpha = \vartheta V I^{\vartheta V^x v_1} v_2$, $\alpha' = \vartheta V I^{\vartheta V^{x'} v'}$; $\alpha < \alpha'$ bedeutet $\vartheta V^x v_1 < \vartheta V^{x'} v'$, was auf 1. führt. 3. $\alpha = \vartheta V I^x$, $\alpha' = \vartheta V I^{x'} v'$; $\alpha < \alpha'$ ist gleichwertig mit $x \leqq x'$. 4. $\alpha = \vartheta V^{\vartheta V v}$, $\alpha' = \vartheta V^{\vartheta V v'_1} v'_2$; $\alpha < \alpha'$ ist äquivalent mit $v \leqq v'_1$. 5. $\alpha = \vartheta\left(V I^{\vartheta V^{x_1}}\right)^{x_2} v$, $\alpha' = \vartheta V I^{\vartheta V^{\vartheta V}} v'$; es ist immer $\alpha < \alpha'$.

Dieses Verfahren hat man nun auch anzuwenden bei den „internen" Vergleichungen für die Exponenten aller Stufen einer v-Darstellung, die durch die Ungleichungen im Schema (9) [oder I, § 3, (22)] notwendig werden. Die Formen, in denen die oberen Schranken für die Exponenten erscheinen, sind zwar meistens keine v-Darstellungen, aber sie können trotzdem ohne weiteres mit den v-Darstellungen der Exponenten verglichen werden. Um das deutlich zu machen, genügt die Betrachtung des Falles $\alpha = \left((\vartheta (V I^{\alpha_1})^{\beta_1}) (V I^{\alpha_2})^{\beta_2}\right) V^{\gamma}$, wo die Exponenten $\alpha_1, \ldots, \gamma$ in v-Darstellung zu denken sind. Zu den Vergleichungen $\vartheta VII' > \alpha_1 > \alpha_2$ ist nichts zu sagen. Die Vergleichung $\beta_1 < \vartheta V I^{\alpha_1 + 1}$ ist trivial, wenn β_1 kein I enthält. Sei daher $\vartheta V I^{\delta}$ der größte Anfang von β_1, der diese Form hat. Dann muß $\delta < \alpha_1 + 1$, also entweder $\delta = \alpha_1$ oder $\delta < \alpha_1$ sein. — Für β_2 gilt: $\beta_2 < \left(\vartheta (V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\right) V I^{\alpha_2 + 1}, \alpha_2 + 1 \leqq \alpha_1$. Sei $\left(\vartheta (V I^{\delta_1})^{\varepsilon_1}\right) V I^{\delta_2}$ der größte Anfang von β_2 mit dieser Form. Dann ist entweder $\delta_1 < \alpha_1$ oder $\delta_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_1 < \beta_1$ oder $\delta_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_1 = \beta_1$, $\delta_2 < \alpha_2 + 1$, also $\delta_2 = \alpha_2$ oder $\delta_2 < \alpha_2$. — Endlich wird $\gamma < \left((\vartheta (V I^{\alpha_1})^{\beta_1}) \vartheta (V I^{\alpha_2})^{\beta_2}\right) V I$, wobei $\alpha_2 \geqq 1$. Ist etwa $\left(\vartheta (V I^{\sigma_1})^{\tau_1}\right) (V I^{\sigma_2})^{\tau_2}$ der größte Anfang von γ, der diese Form besitzt, so gilt entweder $\sigma_1 < \alpha_1$ oder $\sigma_1 = \alpha_1$, $\tau_1 < \beta_1$ oder $\sigma_1 = \alpha_1$, $\tau_1 = \beta_1$, $\sigma_2 < \alpha_2$ oder $\sigma_1 = \alpha_1, \ldots, \sigma_2 = \alpha_2$, $\tau_2 < \beta_2$ oder $\sigma_1 = \alpha_1, \ldots, \tau_2 = \beta_2$, wobei im letzten Fall in γ nach dem obigen Anfang kein I mehr kommt. — Immer sind also v-Darstellungen zu vergleichen.

Daher führt die Gesamtheit der internen Vergleichungen im allgemeinen wieder zu Relationen zwischen den x, v, die für je zwei betroffene x bzw. v dann eine der Formen

$$x_i = x_j; \quad x_i \leqq x_j; \quad x_i < x_j \quad \text{bzw.} \quad v_i = v_j; \quad v_i \leqq v_j; \quad v_i < v_j$$

haben und die formal gesehen von ϑ und V ganz unabhängig sind. — Es kann natürlich vorkommen, daß gar keine Relationen notwendig werden, wie z.B. in $\alpha = \left(\vartheta\left(VI^{\vartheta V}\right)^{\vartheta VI^{x_1}}\right) VI^{x_2}$.

Wenn wir von einer gegebenen Zahl $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ des freien oder des konstruktiven Algorithmus ($\vartheta = 1$) ausgehen, werden die Relationen zwischen den x, v — falls es solche gibt — in der v-Darstellung von α miteinander verträglich sein (was sich in allen Fällen in endlich vielen Schritten feststellen läßt). Sind wir von einem $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ des freien Algorithmus ausgegangen, dann lassen sich diese verträglichen Relationen auf unendlich viele Weisen befriedigen, indem wir für die x und v geeignete natürliche Zahlen >1 wählen. Ersetzen wir die x und v in der v-Darstellung von α durch diese natürlichen Zahlen — was ohne weiteres möglich ist, da v die formale Stellung eines Koeffizienten hat; vgl. Fußnote [6]) —, so erhalten wir eine vollreguläre Zahlenfigur η des konstruktiven Algorithmus von spezieller Form, wenn wir noch 1 für ϑ schreiben, und $\alpha = f_\vartheta(\eta)$ ist die v-Darstellung von α. Damit ist der erste Teil von Satz 2 für die $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ bewiesen.

Nehmen wir die Voraussetzung des zweiten Teils von Satz 2 als erfüllt an, so lassen sich die Relationen zwischen den x, v, die sich bei der konstruktiven Analyse der v-Darstellung $f_1(\eta)$ einer beliebigen vollregulären I-Zahl η ergeben, wegen ihrer Verträglichkeit auch vom Standpunkt des freien Algorithmus aus erfüllen, da wir den Variablen x und v wieder beliebig viele verschiedene „Werte" geben können (x bzw. βv bei festem β variiert ja in der unendlichen Menge $(1, \vartheta V)$ bzw. $(\beta, \beta V)$). Also gibt es Zahlen aus $[\vartheta VI, \vartheta VII')$, für die $f_\vartheta(\eta)$ die v-Darstellung ist. Damit ist die zweite Hälfte von Satz 2 auch für die $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ und die I-Zahlen bewiesen.

4. Ganz analog wäre der Satz 2 hinsichtlich der Zahlen aus $[\vartheta VII', \vartheta VII'I'')$ und der vollregulären I'-Zahlen zu beweisen usw., insofern die Methoden dieselben bleiben und nur die Formeln komplizierter werden. Das ergibt sich aus der fortdauernden Gleichläufigkeit der Analyse der v-Darstellung im konstruktiven und im freien Algorithmus, welche auf der „Äquivalenz" der folgenden Prinzipien beruht:

Prinzip des „größten Anfangs" von einer gewissen Form	$\approx$	Charakteristische Eigenschaft der Normalfunktionen
„Horizontale "Endlichkeit einer Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus	$\approx$	Systematische Verkleinerung der oberen Einschließungsschranken
„Vertikale" Endlichkeit usw.	$\approx$	Rekursionssatz.

Äquivalente Prinzipien bewirken dabei immer dasselbe formale Ergebnis, wie wir an Hand der Zahlen $\in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ und der I-Zahlen nochmals kurz erläutern. In **I**, § 3, **2** haben wir aus dem Umstand, daß wir eine I-Zahl α, d.h. eine Zahl aus $[1VI, \alpha VII')$ betrachten wollten, geschlossen, daß α einen größten Anfang der Form $1VI^{x_1}$, $\alpha_1 < 1VII'$, haben muß, woraus natürlich

$1VI^{\alpha_1} \leqq \alpha < 1VI^{\alpha_1+1}$ (mit $\alpha_1 < \alpha$) folgt, was der Relation (8_1) entspricht usw. Das Prinzip des größten Anfangs führt also im konstruktiven Algorithmus zu derselben Einschachtelung von α wie im freien Algorithmus die Benützung der charakteristischen Eigenschaft der Normalfunktionen ϑVI^{ξ}, $\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\xi}$ usw. Unter der charakteristischen Eigenschaft einer Normalfunktion $f(\xi)$ verstehen wir dabei den Umstand, daß es zu einem β mit $f(\xi_1) \leqq \beta < f(\xi_2)$ ein ξ gibt, so daß $f(\xi) \leqq \beta < f(\xi+1)$ gilt. — Das Abbrechen des Einschachtelungsprozesses ergab sich konstruktiv aus der Endlichkeit der Zahlenfiguren von „links nach rechts", im freien Algorithmus aus dem Abnehmen der oberen Einschließungsschranken. — Daß man mit der Untersuchung der Exponenten 2., 3., ... Stufe einmal zu Ende kommt, folgt im konstruktiven Algorithmus aus der Endlichkeit der Figuren von „unten nach oben", im freien Algorithmus aus dem Rekursionssatz.

Diese Entsprechungen bleiben natürlich auch gültig hinsichtlich der mittels höherstufiger Operatoren $I', I'', \ldots$ gebildeten Zahlen.

5. Die „grobe" v-Normalform für eine Zahl aus $M(\vartheta)$ läßt sich durch eine feinere Normalform ersetzen, wenn man genauere Angaben über den Grundoperator V hat. Wir betrachten insbesondere den Fall, daß V erklärt ist durch

$$\alpha V = \alpha\varrho \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P),\ 1 < \varrho < P. \tag{14}$$

Dann können wir $\vartheta = 1$ setzen und es wird $\varrho = 1V$. Mit y bzw. z bezeichnen wir eine Zahl aus $[1, 1V)$ bzw. $[0, 1V)$.

Für ein $\alpha \geqq \varrho$ haben wir die „Polynomdarstellung"

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \varrho^{\varepsilon_1}\pi_1 + \cdots + \varrho^{\varepsilon_r}\pi_r + \tilde{\pi}, \\ \text{wo} \\ \varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_r \geqq 1, \quad 1 \leqq \pi_i < \varrho \ \ (i = 1, \ldots, r), \quad 0 \leqq \tilde{\pi} < \varrho. \end{array}\right. \tag{15}$$

Dafür können wir auch schreiben

$$\alpha = 1V^{1+\varepsilon_1}y_1 + \cdots + 1V^{1+\varepsilon_r}y_r + z. \tag{16}$$

Sei $\alpha \in M(1)$. Bedeutet χ_1 die v-Normalform von $1V^{1+\varepsilon_1}$, so ist $\alpha = \chi_1 v$ oder (im Fall $\alpha = 1V^{1+\varepsilon_1}$) $\alpha = \chi_1$ die v-Normalform von α. Denn ist $\alpha = \chi' v'$ die tatsächliche v-Normalform von α, so gilt $\chi' = 1V^{\mu}$ (vgl. § 4, **2**, Bemerkungen bezüglich der Iteratoren) und folglich $1V^{\mu} \leqq \alpha < 1V^{\mu+1}$, d.h. es muß $\mu = 1 + \varepsilon_1$ sein.

Bezeichnen wir allgemein mit χ_i die v-Normalform von $1V^{1+\varepsilon_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ in (16), so erhalten wir für α die schematische Darstellung

$$\alpha = \chi_1 y_1 + \cdots + \chi_r y_r + z \quad (\chi_1 > \cdots > \chi_r). \tag{17}$$

Die Variablen x, v in (17) rechts sind dabei alle verschieden zu wählen. Die in den v-Formen χ_i auftretenden Exponenten erster Stufe, die $\geqq 1V$ sind, lassen sich ebenfalls in der Form (17) darstellen (wobei wir die neu auftretenden Variablen y und z untereinander und von den früheren durch Indizes unterscheiden) usf. Nach dem Rekursionssatz müssen wir bei einer gewissen Stufe

damit enden, daß überall Exponenten $< 1V$ stehen, welche die v-Normalform 1 oder x haben. In der so für α erreichten schematischen Darstellung — aus welcher die v verschwunden sind — lassen wir die Exponenten 1 weg. Ferner ersetzen wir die y, welche einen Koeffizienten >1 bedeuten, durch ein x und lassen die anderen y fort; ebenso ersetzen wir die z, welche einen Summanden >0 vertreten, durch ein y und lassen die übrigen z weg. Bei alledem richten wir es wieder so ein, daß keine zwei x oder y mit demselben Index auftreten. Die hierdurch zuletzt gewonnene Darstellung für α nennen wir seine *additive Normalform*; sie ist eine Figur aus den Zeichen 1, ( ), +, V, I, I', I'', ... und gewissen Variablen $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$.

Im konstruktiven Algorithmus erhält man die additiven Normalformen aus den vollregulären Zahlen η, indem man in diesen die als Exponenten oder Koeffizienten stehenden natürlichen Zahlen durch Variable x und die als Summanden stehenden natürlichen Zahlen durch Variable y ersetzt. Die so aus η entstehende additive Normalform für η bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}(\eta)$. An Stelle von (6) müssen wir jetzt definieren:

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}(1) = 1, & \text{wenn 1 eine individuelle Zahl oder ein Exponent oder ein Koeffizient ist;} \\ \mathfrak{f}(1) = y & \text{in der Verbindung } \mathfrak{f}(\lambda) + \mathfrak{f}(1) = \mathfrak{f}(\lambda + 1), \text{ wo } \lambda \text{ eine Limeszahl ist.} \end{cases}$$

Bei gegebenem η bestehen zwischen den in $\mathfrak{f}(\eta)$ auftretenden x bzw. y gewisse Relationen der einfachen in **3** angegebenen Form, welche aus den Ungleichungen für die Exponenten von η und die Summandenteile χ_i des Schemas (17) herrühren und den durch sie induzierten Vergleichungen entstammen.

Da sich die Betrachtungen im konstruktiven und freien Algorithmus wieder völlig gleichläufig vollziehen — die Größenvergleichung zweier Zahlen der Form (17) geschieht beidemale nach denselben Regeln; vgl. **I**, § 3, **1** —, so ist klar, daß die additive Normalform eines α des freien Algorithmus ebenfalls ein $\mathfrak{f}(\eta)$ ist; denn die sich einstellenden Relationen zwischen den x bzw. y in der additiven Normalform von α können wegen ihrer Verträglichkeit auch durch geeignete natürliche Zahlen befriedigt werden. Wenn außerdem ϱ in (14) transfinit ist, haben wir für die x, y beliebig viele Werte zur Verfügung, d.h. wir können jedes $\mathfrak{f}(\eta)$ zugleich als Darstellung von Zahlen aus $M(1)$ in dem durch (14) definierten freien Algorithmus mit dem Grundoperator V und der Ausgangszahl $\vartheta = 1$ ansehen. — Damit ist bewiesen:

Satz 3. *Im freien Algorithmus mit der Ausgangszahl* 1 *und dem durch* (14) *definierten Grundoperator* V *läßt sich jede Zahl* $\alpha \in M(1)$ *eindeutig durch eine additive Normalform* $\mathfrak{f}(\eta)$ *darstellen. — Ist die Zahl* ϱ *in* (14) *transfinit, so stellt umgekehrt* $\mathfrak{f}(\eta)$ *für jedes vollreguläre* η *Zahlen aus* $M(1)$ *dar.*

η ist im allgemeinen durch $\alpha = \mathfrak{f}(\eta)$ nicht eindeutig bestimmt und umgekehrt können unendlich viele α dieselbe additive Normalform $\mathfrak{f}(\eta)$ haben. — Setzen wir $\varrho = \omega$, so besagt Satz 3, daß durch die vollregulären Zahlen des

konstruktiven Algorithmus alle Ordnungszahlen der Menge $M(1)$ — diese im „naiven" Sinne aufgefaßt — eineindeutig wiedergegeben werden.

Für $\varrho = 2$ entfallen in den additiven Normalformen für die $\alpha \in M(1)$ die Variablen x und die y können durch 1 ersetzt werden, da y nur in der Menge $\{1\}$ variiert. Also ist in diesem Falle η durch $\alpha = \hat{\imath}(\eta)$ wohlbestimmt, und es treten alle η ins Spiel, welche keine Verbindung $1 + 1$ als Teilfigur enthalten. Näheres über den durch $\varrho = 2$ induzierten freien und konstruktiven Algorithmus s. **III**, § 7, **5**.

§ 6. Die Abgeschlossenheit der Bereiche $M(\mathfrak{F})$ gegenüber dem freien Algorithmus der Operatoren $V, I, I', I'', \ldots$.

1. Wir betrachten jetzt einige Eigenschaften der Zahlenfiguren $\mathfrak{F}$ des freien Algorithmus (vgl. § 4, **2**). Mit $\mathfrak{F}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir solche $\mathfrak{F}$, in welchen die Operatoren $V, I, I', \ldots$ bis höchstens zur n. Stufe einschließlich auftreten.

Einen Operator V von erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ nennen wir *monoton*, wenn gilt

$$\alpha V \leqq \beta V \quad \text{für} \quad \alpha^{(0)} \leqq \alpha < \beta < P.$$

Sind V und W zwei Operatoren erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, so wollen wir sagen, W sei *stärker* als V oder V *schwächer* als W, in Zeichen $W > V$ oder $V < W$, wenn gilt:

$$\alpha V < \alpha W \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

$V \leqq W$ soll bedeuten, daß immer $\alpha V \leqq \alpha W$ ist. $V \leqq W$ bedingt nicht die Alternative $V < W$ oder $V = W$, denn es kann zwei Zahlen $\alpha \neq \beta$ geben mit $\alpha V = \alpha W$, $\beta V < \beta W$ (Beispiel: $\alpha V = 2\alpha^2$, $\alpha W = \omega\alpha^2$ für $\alpha \in [1, \omega_1)$). Aus $V \leqq W$ und $W \leqq V$ zusammen folgt jedoch $V = W$. — Wegen $\alpha V \geqq \alpha + 1$ für jedes V können wir daher symbolisch $V \geqq +1$ schreiben. — $V \geqq \cdot\sigma$ (σ feste Zahl aus $[2, P)$) soll ausdrücken, daß $\alpha V \geqq \alpha \cdot \sigma$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ ist.

Analog kann man eine $<$-Relation zwischen Operatoren zweiter Stufe erklären, ebenso zwischen Operatoren dritter Stufe usf. Für zwei Operatoren zweiter Stufe $J, \bar{J}$ z.B. soll $J < \bar{J}$ bedeuten, daß $\alpha V J < \alpha V \bar{J}$ ist für alle α und V des Bereichs $[\alpha^{(0)}, P)$; $J \leqq \bar{J}$ bedeutet entsprechend $\alpha V J \leqq \alpha V \bar{J}$. Aus $J < \bar{J}$ folgt $VJ < V\bar{J}$ für alle V; bei $J \leqq \bar{J}$ aber hat man für ein bestimmtes V noch drei Möglichkeiten: $VJ \leqq V\bar{J}$, $VJ < V\bar{J}$, $VJ = V\bar{J}$. — Aus $J \leqq \bar{J}$ und $\bar{J} \leqq J$ zugleich folgt wieder $J = \bar{J}$.

2. Zunächst zeigen wir:

Hilfssatz 2. *αVI ist für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ immer eine Potenz $\omega^\nu \geqq \omega$.*

Beweis. Offenbar hat man

(19) (a) $\alpha V^\beta \geqq \alpha + \beta$ (b) $\alpha VI \geqq \alpha\omega$,

somit

(20) $\alpha + \alpha VI = \alpha VI$.

Ferner sieht man leicht ein, daß

$$(\alpha V^{\beta})VI = \alpha VI \quad \text{für} \quad \beta + \alpha VI = \alpha VI. \tag{21}$$

Denn nach Voraussetzung ist $\alpha V^{\beta+\alpha VI} = \alpha V^{\alpha VI} = \alpha VI$ (Satz 1), somit αVI kritische Zahl der Normalfunktion $\alpha V^{\beta+\xi}$ von ξ. Wieder nach Satz 1 ist $(\alpha V^{\beta})VI$ die erste kritische Zahl der Normalfunktion $(\alpha V^{\beta})V^{\xi} = \alpha V^{\beta+\xi}$ von ξ, folglich $\alpha VI \geqq (\alpha V^{\beta})VI$. Da andererseits, wie unmittelbar einleuchtet, $\alpha VI \leqq (\alpha V^{\beta})VI$ ist, so folgt (21). — Die hier verwendete Schlußweise werden wir im folgenden öfters benützen unter dem Namen „Prinzip der kritischen Zahlen". — Ersetzt man in (20) α durch αV^{β}, so liefert (21):

$$\alpha V^{\beta} + \alpha VI = \alpha VI \quad \text{für} \quad \beta + \alpha VI = \alpha VI. \tag{21a}$$

Für $\beta = 1$ erhalten wir aus (21a) durch Iteration die Beziehungen:

$$\alpha V + \alpha VI = \alpha VI, \quad \alpha V^{\alpha V} + \alpha VI = \alpha VI, \quad \alpha V^{\alpha V^{\alpha V}} + \alpha VI = \alpha VI, \ldots,$$

woraus sich nach (3_1) ergibt, daß $\beta + \alpha VI = \alpha VI$ für $\beta < \alpha VI$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Zugleich haben wir gefunden:

$$(\alpha V^{\beta})VI = \alpha VI \quad \text{für} \quad \beta < \alpha VI. \tag{22}$$

Unter Beachtung der Definition $V \geqq \cdot\, \sigma$ in **1** ergibt sich induktiv:

$$\alpha V^{\beta} \geqq \alpha \cdot \sigma^{\beta} \quad \text{für} \quad V \geqq \cdot\, \sigma, \tag{23}$$

also wegen $\beta \leqq \sigma^{\beta}$:

$$\alpha VI = \alpha V^{\alpha VI} \geqq \alpha\sigma^{\alpha VI} \geqq \sigma^{\alpha VI} \geqq \alpha VI, \quad \text{d.h.}$$

Hilfssatz 3. *Unter der Voraussetzung* $V \geqq \cdot\, \sigma$, $2 \leqq \sigma < P$, *ist* $\alpha VI = \sigma^{\alpha VI}$. *Im Fall* $\alpha VI > \omega$ *ist dann* αVI *eine* ε*-Zahl, z. B. für* $\sigma \geqq \omega$ *oder* $\alpha \geqq \omega$.

Mit Rücksicht auf (19b) folgt hieraus:

Hilfssatz 4. $\alpha VI^2 = \alpha(VI)I$ *ist stets eine* ε*-Zahl, daher auch* αVI^{ν} *für* $2 \leqq \nu < P$.

Wegen $\alpha V^{\beta} < \alpha VI$ für $\beta < \alpha VI$ folgt vermöge Hilfssatz 2

$$(\alpha V^{\beta})V^{\gamma} = \alpha V^{\beta+\gamma} < \alpha VI \quad \text{für} \quad \beta < \alpha VI,\ \gamma < \alpha VI; \tag{24}$$

ferner gilt, wenn αVI eine δ-Zahl ist, d.h. die Form $\omega^{\omega^{\mu}} \geq \omega^{\omega}$ hat:

$$\alpha(V^{\beta})^{\gamma} = \alpha V^{\beta\gamma} < \alpha VI \quad \text{für} \quad \beta < \alpha VI,\ \gamma < \alpha VI,\ \alpha VI \text{ eine } \delta\text{-Zahl}. \tag{25}$$

Nach Hilfssatz 3 ist die Bedingung hinsichtlich αVI in (25) z. B. für $V \geqq \cdot\, \omega$ erfüllt.

Bei monotonem V hat man

$$\xi VI = \alpha VI \quad \text{für} \quad \xi \in [\alpha, \alpha VI),\ V \text{ monoton}. \tag{26}$$

Aus $\xi < \alpha V I$ folgt nämlich die Existenz eines (kleinsten) $\eta < \alpha V I$ mit $\xi < \alpha V^{\eta}$, so daß wegen der Monotonie von V mit Rücksicht auf (22) $\alpha V I \leqq \xi V I \leqq (\alpha V^{\eta}) V I = \alpha V I$ wird. — Aus (24) (angewandt auf ξ statt α) und (26) folgt

(27) $\quad (\xi V^{\beta}) V^{\gamma} < \alpha V I \quad$ für $\quad \xi \in [\alpha^{(0)}, \alpha V I)$, V monoton; β, γ wie (24)

[denn im Fall $\xi < \alpha$ ist die linke Seite in (27) nicht größer als im Fall $\xi \geqq \alpha$]. Nimmt man überdies an, daß $\xi V I$ eine δ-Zahl ist für alle $\xi \in [\alpha, \alpha V I)$, so gilt (25) für diese ξ an Stelle von α und vermöge (26) kommt

(28) $$\begin{cases} \xi (V^{\beta})^{\gamma} < \alpha V I \quad \text{für} \quad \xi \in [\alpha^{(0)}, \alpha V I), \\ \xi V I \text{ eine } \delta\text{-Zahl für } \xi \in [\alpha, \alpha V I)\text{: } \beta, \gamma \text{ wie (25).} \end{cases}$$

Aus (24), (25) sowie (27) und (28) schließt man den Satz ($\mathfrak{F}(\vartheta)$ s. § 4, **2**):

Satz 4. *Ein $\mathfrak{F}^{(1)}(\vartheta)$ bzw. $\mathfrak{F}^{(1)}$, in welchem sämtliche Zahlenvariable Zahlen $< \vartheta V I$ bedeuten, repräsentiert immer Zahlen $< \vartheta V I$, wenn $\vartheta V I$ eine δ-Zahl ist bzw. alle $\xi V I$ mit $\xi \in [\vartheta, \vartheta V I)$ δ-Zahlen sind und V monoton ist. — Die Voraussetzung betreffend δ-Zahlen ist z. B. erfüllt im Fall $V \geqq \cdot \omega$.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß der Satz stimmt für diejenigen $\mathfrak{F}^{(1)}(\vartheta)$ bzw. $\mathfrak{F}^{(1)}$ der genannten Art, in denen das Zeichen V nur in der Grundzeile auftritt. Dann aber muß die Behauptung auch für Figuren richtig sein, in welchen wohl die zweite Zeile das Zeichen V enthält, nicht aber die dritte; denn in diesem Fall lassen sich die ein V enthaltenden Exponenten erster Stufe durch Variable ersetzen, welche Zahlen $< \vartheta V I$ bedeuten. Nun geht man zu Figuren über, welche V in der dritten, aber nicht in der vierten Zeile aufweisen usf.

3. Satz 4 ist die Vorstufe zu folgenden Sätzen:

Satz 5. *Ein $\mathfrak{F}^{(n)}(\vartheta)$ und, wenn V monoton ist, auch ein $\mathfrak{F}^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, deren Zahlenvariable stets Zahlen $< \vartheta V I \ldots I^{(n-1)}$ bedeuten, stellen selbst wieder Zahlen $< \vartheta V I \ldots I^{(n-1)}$ dar.*

Satz 6. *Ein $\mathfrak{F}(\vartheta)$ und bei monotonem V auch ein $\mathfrak{F}$, deren Zahlenvariable stets Zahlen aus $M(\vartheta)$ bedeuten, repräsentieren ebenfalls Zahlen aus $M(\vartheta)$.* — Der Algorithmus führt also nicht aus dem Bereich $M(\vartheta)$ heraus.

Satz 6 ist offenbar eine Folge von Satz 5. Den Satz 5 beweisen wir explizit für $n = 2$; die Beweise für $n = 3, 4, \ldots$ verlaufen analog.

Zunächst hat man die durch Induktion nach γ zu bestätigende Ungleichung [vgl. den Beweis von (6) in III]

(29) $$\alpha (V I^{\beta})^{\gamma} \leqq \alpha V (I^{\beta})^{\gamma} = \alpha V I^{\beta \gamma} \quad (\beta \geqq 1),$$

aus der sich sukzessive die Ungleichungen ergeben:

(30_1) $$\alpha V^{\beta} \leqq \alpha (V I)^{\beta} \leqq \alpha V I^{\beta},$$

(30_2) $$\alpha (V^{\beta}) I^{\gamma} \leqq \alpha (V I^{\beta}) I^{\gamma} = \alpha V I^{\beta + \gamma} \qquad (\beta \geqq 1),$$

(30_3) $$\alpha \big((V^{\beta}) I^{\gamma}\big)^{\delta} \leqq \alpha (V I^{\beta + \gamma})^{\delta} \leqq \alpha V I^{(\beta + \gamma)\delta} \quad (\beta \geqq 1),$$

$$(30_4)\quad \begin{cases} \left(\alpha\left((V^\beta)\,I^\gamma\right)^\delta\right)\left((V^{\beta_1})\,I^{\gamma_1}\right)^{\delta_1} \leqq \alpha\left(\left((V^\mu)\,I^\mu\right)^\mu\right)^2 \leqq \alpha V I^{\mu^2\mu^2}, \\ \text{wobei} \qquad \mu = \max(\beta, \ldots, \delta_1), \qquad \beta \text{ und } \beta_1 \geqq 1, \end{cases}$$

$$(30_5)\quad \alpha\left(\left((V^\beta)\,I^\gamma\right)^\delta\right)I^\varepsilon \leqq \alpha\left(V I^{(\beta+\gamma)\,\delta}\right)I^\varepsilon = \alpha V I^{(\beta+\gamma)\,\delta+\varepsilon}\ ^{10}) \qquad (\beta \text{ und } \delta \geqq 1).$$

Da $\alpha V II' = \alpha V I^{\alpha V II'}$ nach Hilfssatz 4 eine ε-Zahl ist, so folgt aus $\alpha V I^\nu < \alpha V II'$ für $\nu < \alpha V II'$, daß die rechten und um so mehr die linken Ausdrücke in den Relationen (30) immer $< \alpha V II'$ bleiben, wenn die Exponenten $\beta, \ldots, \delta_1$ es tun.

Ist V monoton, so gilt

$$(31)\quad \xi V II' = \alpha V II' \quad \text{für} \quad \xi \in [\alpha, \alpha V II'), \quad V \text{ monoton}.$$

Denn es gibt ein kleinstes $\eta < \alpha V II'$, so daß $\xi \leqq \alpha V I^\eta$. Dann wird wegen der Monotonie von V:

$$\begin{aligned} \alpha V II' &\leqq \xi V II' \leqq (\alpha V I^\eta) V II' \\ &= \lim\left\{(\alpha V I^\eta) V I,\ (\alpha V I^\eta) V I^{(\alpha V I^\eta) V I}, \ldots\right\} \leqq \alpha V II', \end{aligned}$$

da jedes Glied in $\{\}$ auf Grund der Bemerkung zu den Relationen (30) unterhalb $\alpha V II'$ bleibt.

Die Relationen (30) gelten auch, wenn man α durch ξ ersetzt, und die bei dieser Substitution entstehenden linken Ausdrücke in (30) bleiben für $\xi \in [\alpha, \alpha V II')$ vermöge (31) wiederum $< \alpha V II'$, wenn die Exponenten $\beta, \ldots, \delta_1$ es tun. Das trifft erst recht für $\xi < \alpha$ zu, also für alle $\xi \in [\alpha^{(0)}, \alpha V II')$.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgert man, daß ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ und, wenn V monoton, auch ein $\mathfrak{F}^{(2)}$ von der in Satz 5 vorausgesetzten Art, in welchen die Symbole V, I nur in der Grundzeile auftreten, stets Zahlen $< \vartheta V II'$ darstellen. Nun schließt man weiter wie beim Beweis von Satz 4.

Bemerkung. (30_1) läßt sich verschärfen zu

$$(32)\quad \alpha V^\beta < \alpha V I^\beta \quad \text{für} \quad \beta < \alpha V II'.$$

Denn für $1 \leqq \beta < \alpha V I$ wird $\alpha V^\beta < \alpha V I \leqq \alpha V I^\beta$, für $\alpha V I \leqq \beta < \alpha V I^{\alpha V I}$ kommt $\alpha V^\beta < \alpha V^{\alpha V I^{\alpha V I}} = \alpha V I^{\alpha V I} \leqq \alpha V I^\beta$ usw.[11]). Nach (3_2) ergibt sich daraus die Behauptung.

4. Es gelten ferner die Sätze:

Satz 7. *Ein $\mathfrak{F}^{(n+1)}(\vartheta)$, in welchem das Zeichen $I^{(n-1)}$ genau einmal und zwar als letztes (im Sinn der Links-rechts-Struktur) auftritt und sämtliche Zahlenvariablen Zahlen $< \vartheta V I \ldots I^{(n-1)}$ bedeuten, hat immer den Wert $\vartheta V I \ldots I^{(n-1)}$ für $n = 2, 3, \ldots$ und, wenn $\vartheta V I$ eine δ-Zahl ist, auch für $n = 1$.*

[10]) Die einleuchtenden Relationen (29) und (30) beruhen auf dem Umstand, daß I ein monotoner Iterator ist; vgl. III, § 7, **1**. Die Monotonie von V wird nicht vorausgesetzt.

[11]) Für $\nu \geqq 2$ gilt $\alpha V I^\nu = \alpha(VI) I^{-1+\nu} \cup \{\alpha(VI)^\mu\}_{1 \leqq \mu < P}$; durch Induktion nach μ folgt, daß alle $\alpha(VI)^\mu$ kritische Zahlen von αV^ξ sind, also auch alle $\alpha V I^\nu$.

Diese Aussage gilt bei monotonem V unter denselben Voraussetzungen auch für ein $\mathfrak{F}^{(n+1)}$, dessen Kernvariable Werte $\geq \vartheta$ haben[12]*), wobei für $n=1$ noch alle $\xi V I$ mit $\xi \in [\vartheta, \vartheta V I)$ als δ-Zahlen vorauszusetzen sind.*

Satz 8. *Der Satz 7 ist für $n=1$ äquivalent mit Satz 4 und für $n=2, 3, \ldots$ äquivalent mit Satz 5 für die gleichen n.*

Wir beweisen Satz 8 und damit Satz 7. Es genügt, den Beweis für $n=2$ zu führen, die übrigen Fälle verlaufen analog. Zunächst zeigen wir, daß Satz 7 für $n=2$ aus Satz 5 für $n=2$ folgt. Sei also Satz 5 richtig und sei $\gamma=\mathfrak{F}^{(3)}(\vartheta)$ von der in Satz 7 verlangten Art. Die Figur γ hat also entweder selbst die Form $\beta W J I'$ (W bzw. J ein Operator erster bzw. zweiter Stufe) oder sie besitzt einen Exponenten δ von dieser Form, so daß I' wieder das am weitesten rechts stehende Zeichen von γ wird. Durch Weglassung von I' entsteht aus γ ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$. — Es ist $\beta W J I' = \lim\limits_{p} \beta_p$, $\beta_1 = \beta W J$, $\beta_{p+1} = \beta W J^{\beta_p}$. β_1 ist ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ der in Satz 5 verlangten Art, also auch $\beta_2 = \beta W J^{\beta_1}$, desgleichen β_3 usw., d.h. allgemein β_p. Im Falle $\gamma = \beta W J I'$ setzen wir $\gamma_p = \beta_p$; ist aber $\delta = \beta W J I'$ ein Exponent von γ, so bedeute γ_p die Figur, die aus γ entsteht, indem man δ durch β_p ersetzt. In jedem Falle ist auch γ_p ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ der in Satz 5 verlangten Art. Also gilt $\gamma_p < \vartheta V I I'$, mithin $\gamma = \lim\limits_{p} \gamma_p \leq \vartheta V I I'$. — Andererseits ist W bzw. $J I'$ nicht schwächer als V bzw. $I I'$, so daß $\gamma \geq \beta W J I' \geq \vartheta V I I'$ sein muß[13]). Also ist $\gamma = \vartheta V I I'$. — Hinsichtlich eines $\mathfrak{F}^{(3)}$ der in Satz 7 geforderten Beschaffenheit verläuft der Beweis genau so[14]).

Nun beweisen wir das umgekehrte. Es sei daher Satz 7 richtig und $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ von der in Satz 5 geforderten Form. $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ läßt sich in der Gestalt βW schreiben, wo β entweder gleich ϑ oder selbst ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ ist. In W tritt außer V höchstens noch I auf. W hat entweder die Gestalt $\overline{W} J$, $\overline{W}$ ein Operator und J ein Iterator erster Stufe, oder W hat nicht diese Gestalt. Im letzteren Fall ersetzen wir W durch $W I$ und erhalten ein größeres $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ der Form $\beta W I$. Also können wir von vornherein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta) = \beta W J$ annehmen. Somit gilt $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta) < \beta W J I'$, und da $\beta W J I'$ ein $\mathfrak{F}^{(3)}(\vartheta)$ nach den Bedingungen von Satz 7 ist, kommt $\beta W J I' = \vartheta V I I' > \mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$. — Wenn ein $\mathfrak{F}^{(2)}$ gemäß Satz 5 gegeben ist, verläuft der Beweis genau so, denn wir können erforderlichenfalls zu einem (nicht kleineren) $\mathfrak{F}^{(2)}$ übergehen, dessen Kernvariable Werte $\geq \vartheta$ haben.

---

[12]) Es genügt auch die Voraussetzung, daß überhaupt eine Zahlenvariable in $\mathfrak{F}^{(n+1)}$, die an geeigneter Stelle steht, einen Wert $\geq \vartheta$ habe; z.B. ist $\alpha V I (I'^{\beta}) I'' = \vartheta V I I' I''$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, \vartheta V I I' I'')$, $\beta \in [\vartheta, \vartheta V I I' I'')$. Der Beweis erfordert die Verallgemeinerung einiger in III bewiesener Formeln und Sätze.

[13]) Dieser leicht einzusehende Schluß fußt darauf, daß $\beta \in \{\vartheta V^{\nu}\}_{\nu < P}$, W eine V-monotone V-Potenz und $J I'$ ein monotoner Iterator erster Stufe ist (vgl. III, § 7, 1).

[14]) Für den in [13]) genannten Schluß ist jetzt zu benützen, daß auf Grund der Voraussetzungen von Satz 7 $\beta \geq \vartheta$ wird und W monoton ist; $J I'$ ist auch als Operator zweiter Stufe monoton. Hierüber siehe III, § 7, 1.

Wir führen jetzt noch zwei Sätze an, die sich von selbst verstehen.

Satz 9. *Sei $\mathfrak{F}$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', I'', \ldots$. Ihre isolierten Variablen seien mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, ihre Kernvariablen mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ bezeichnet. $\tilde{\mathfrak{F}}$ entstehe aus $\mathfrak{F}$, indem man die γ_i und δ_j durch Variable $\tilde{\gamma}_i$ und $\tilde{\delta}_j$ ersetzt und dabei die Ungleichungen $\gamma_i \leqq \tilde{\gamma}_i$, $\delta_j \leqq \tilde{\delta}_j$ verlangt. Dann ist $\mathfrak{F} \leqq \tilde{\mathfrak{F}}$ erstens, wenn $\tilde{\delta}_j \in \{\delta_j V^\nu\}_{\nu<P}$, und zweitens, wenn V monoton ist.* — Die Bedingung $\tilde{\delta}_j \in \{\delta_j V^\nu\}$ ist erfüllt, wenn man für $\tilde{\delta}_j$ ein $\mathfrak{F}$ mit der Ausgangsvariablen δ_j wählt (vgl. § 4, **2**, vorletzter Absatz).

Satz 10. *In den auf die Monotonie von V begründeten Teilen der Sätze 4 bis 8 braucht V nicht als monoton vorausgesetzt zu werden, wenn man fordert, daß die in den betreffenden Zahlenfiguren $\mathfrak{F}$ auftretenden Kernvariablen stets Zahlen aus der Menge $\{\vartheta V^\nu\}_{\nu<P}$ bedeuten.*

Denn auf Grund dieser Forderung kann man so schließen, als ob V monoton wäre.

Bemerkung. Alle Aussagen hinsichtlich des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', I'', \ldots$, die sich ohne Voraussetzung der Monotonie von V begründen lassen, bleiben sinnvoll, wenn man den Grundoperator V an Hand einer beliebigen abgeschlossenen Teilmenge $\{\vartheta_\nu\}_{\nu<P}$ von $[0, P)$ folgendermaßen definiert:

$$\vartheta_\nu = \vartheta V^\nu, \quad \vartheta = \vartheta_0.$$

Dann ist $\alpha^{(0)} = \vartheta$ und die Ausübung von V nur auf Zahlen ϑ_ν erklärt. In den Zahlenfiguren $\mathfrak{F}$ dürfen also die Kernvariablen nur in der Menge $\{\vartheta_\nu\}_{\nu<P}$ variieren.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Oktober 1953.)

Schöneborn, H.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 455—473 (1954)

Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I.

Von
Heinz Schöneborn.

Einleitung.

Bei einer beliebigen topologischen Gruppe sind gruppentheoretische und topologische Struktur lediglich verknüpft durch die Forderung der Stetigkeit der Verknüpfungsoperation. Dementsprechend liegt in der allgemeinen Theorie der topologischen Gruppen das Hauptgewicht der Untersuchungen auf rein topologischem Gebiet, während die spezielleren gruppentheoretischen Eigenschaften der betrachteten Gruppen im allgemeinen nur eine beiläufige Rolle spielen und vielfach kaum zum Ausdruck kommen.

Im Gegensatz dazu soll in der vorliegenden Arbeit eine Klasse von topologischen Abelschen Gruppen untersucht werden, deren Topologie nicht, wie im allgemeinen Falle, auf Grund von topologischen Stetigkeits-, Kompaktheits-, Zusammenhangsforderungen u. dgl., sondern ausschließlich aus der gruppentheoretischen Struktur der betrachteten Gruppe heraus, d.h. also mit Hilfe rein gruppentheoretischer Begriffe definiert wird[1]).

Unter den genannten Gesichtspunkten erscheint es zunächst natürlich, die Topologie der betrachteten Gruppe A mit Hilfe eines aus Untergruppen und ihren Nebenscharen bestehenden Umgebungssystems einzuführen. Nr. 1 und 2 der vorliegenden Arbeit bringen einleitend die wichtigsten auf diesen Fall zugeschnittenen Definitionen und einfachsten Tatsachen. Man bemerkt, daß die gruppentheoretische Bedeutung der „Untergruppentopologien" in der Auszeichnung gewisser Untergruppen, nämlich der topologisch abgeschlossenen, als „zulässiger" Untergruppen liegt. In der Gruppentheorie wird gleiches durch Einführung eines Operatorenbereiches erreicht, und der Versuch liegt nahe, beide Möglichkeiten der Auszeichnung zulässiger Untergruppen in Verbindung zu bringen. Dieses Problem wird in Nr. 3 durch Einführung des Begriffes des „natürlichen Operatorenbereiches" in gewissem Umfange gelöst. Es wird gezeigt, daß die Existenz eines natürlichen Operatorenbereiches der Gruppe A im wesentlichen gleichbedeutend ist mit gewissen einfachen Eigenschaften von A (Zyklohomogenität, Torsionstopologie), die bereits einen engen Zusammenhang zwischen gruppentheoretischer und topologischer Struktur zum Ausdruck bringen. Insbesondere ist es jetzt möglich, ganz allgemein den Begriff der primären Gruppe einzuführen (Nr. 4) und einen Zerlegungssatz

[1]) Vgl. insbesondere Krull, W.: a) Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. J. f. Math. **184** (1942). b) Bewertungstopologie. Bonn 1952 (als Manuskript verbreitet). Sowie Hall jr., M.: A topology for free groups and related groups. Ann. of Math. (II) **52**, 127—139 (1950), insbesondere Abschn. 3.

zu beweisen, der unter gewissen Voraussetzungen die Beschränkung der weiteren Betrachtungen auf den primären Fall gestattet (Satz 5). Die entscheidende Rolle der zyklischen Gruppen bei der Einführung des natürlichen Operatorenbereiches und den daran anschließenden Betrachtungen legt es nahe, die untersuchten Topologien mit Hilfe der zyklischen Gruppen zu klassifizieren, d.h. zwei Topologien τ_1, τ_2 derselben Gruppe A als äquivalent zu bezeichnen, wenn die durch τ_1, τ_2 induzierten Topologien in allen zyklischen Gruppen aus A identisch sind (Nr. 5).

Ist T eine nach dieser Äquivalenzrelation gebildete Topologienklasse der Gruppe A, so enthält T eine eindeutig bestimmte feinste Topologie, die wir als eine „S-Topologie" von A bezeichnen. Ist A primär, zyklovollständig[2]) und besitzt die S-Topologie, so fallen die Begriffe „gegenüber dem natürlichen Operatorenbereich von A zulässige Untergruppe" und „bezüglich der S-Topologie abgeschlossene Untergruppe" zusammen (Satz 10). Im Anschluß daran werden die gröbsten Topologien von A analysiert und es wird gezeigt, daß die Eigenschaft von A, eine gröbste Topologie zu haben, unter naheliegenden Voraussetzungen gleichwertig ist zur Eigenschaft der linearen Kompaktheit (Satz 13 und 15).

In dem demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden zweiten Teil der Arbeit werden die vorstehend skizzierten Resultate zur Herleitung der Theorie der Charakterengruppen der betrachteten Gruppenklassen benutzt. Zunächst ergibt sich, daß die linear kompakten Gruppen die Charakterengruppen der „im strengen Sinne S-topologischen" Gruppen[3]) sind und umgekehrt und daß für beide Gruppenklassen der Dualitätssatz gilt[4]). Für zyklovollständige primäre Gruppen A zeigen wir darüber hinaus:

I. Für die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die Gruppe A ist notwendig, daß für A sowie die Charakterengruppe $C[A]$ von A die folgende Bedingung (K_1) erfüllt ist:

(K_1): Jede in der betrachteten Gruppe abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem ist kompakt.

II. Für die Gültigkeit des Dualitätssatzes ist hinreichend, daß A der obigen Bedingung (K_1) und außerdem der folgenden (K_2) genügt:

(K_2): Ist M eine Untermenge von A, $q \in A$ ein Häufungspunkt von M, dann gibt es eine Untermenge $M_1 \subseteq M$, deren (in A) abgeschlossene Hülle $\widetilde{M}_1$ kompakt ist mit $q \in \widetilde{M}_1$.

---

[2]) Eine topologische Gruppe A heißt „zyklovollständig", wenn die in A abgeschlossene Hülle jeder gewöhnlichen zyklischen Untergruppe von A topologisch vollständig ist.

[3]) Eine S-topologische Gruppe heißt „im strengen Sinne S-topologisch", wenn jede abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem Summe endlich vieler primärer Gruppen ist.

[4]) Während der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erhielt ich Einblick in ein derzeit noch unveröffentlichtes Manuskript einer Arbeit von Herrn I. KAPLANSKY, in welcher in anderem Zusammenhang und auf anderem Wege die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die primären, linear kompakten Gruppen nachgewiesen wird.

Als einfacher Korollar ergibt sich aus dem vorangehenden noch die Gültigkeit des Dualitätssatzes für jede primäre, vollständige Gruppe, welche dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt[5]).

1. Wir betrachten additiv geschriebene Abelsche Gruppen mit dem neutralen Element 0, im folgenden kurz als „Gruppen" bezeichnet. Sei $\mathfrak{E}$ ein System von Untergruppen $A_{\alpha'}$ der Gruppe A, welches den folgenden Bedingungen genügt:

a) Der Durchschnitt je endlich vieler Untergruppen aus $\mathfrak{E}$ enthält eine Untergruppe aus $\mathfrak{E}$.

b) Der Durchschnitt aller Untergruppen aus $\mathfrak{E}$ ist die Nullgruppe.

Fassen wir die $A_{\alpha'}$ und ihre Nebenscharen als vollständiges Umgebungssystem eines aus den Elementen von A bestehenden topologischen Raumes auf, so wird A eine topologische Gruppe. Mit Rücksicht darauf, daß das die Topologie von A definierende System von Nullumgebungen aus Untergruppen von A besteht, sprechen wir hier von einer *Untergruppentopologie*. Alle im folgenden betrachteten Gruppen sind solche mit einer Untergruppentopologie. Die zu $\mathfrak{E}$ gehörenden Untergruppen $A_{\alpha'}$ von A bilden offenbar das Erzeugendensystem eines aus allen endlichen Durchschnitten der Untergruppen $A_{\alpha'}$ und ihren Obermengen bestehenden Filters $\mathfrak{F}_0$[6]), des „Nullfilters" von A. Alle Untergruppen von A aus $\mathfrak{F}_0$ sind (mit ihren Nebenscharen) gleichzeitig offen und abgeschlossen. Umgekehrt gehört jede offene Untergruppe von A zu $\mathfrak{F}_0$. — Sind in der abstrakten Gruppe A zwei Untergruppentopologien τ_1 und τ_2 mit den Nullfiltern $\mathfrak{F}_0^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{F}_0^{(2)}$ definiert, so ist für die Gleichheit von τ_1 und τ_2 bereits notwendig und hinreichend, daß das System $\mathfrak{S}^{(1)}$ aller *Untergruppen* aus $\mathfrak{F}_0^{(1)}$ gleich dem System $\mathfrak{F}^{(2)}$ aller Untergruppen aus $\mathfrak{F}_0^{(2)}$ ist. Das System $\mathfrak{S}$ aller zum Nullfilter $\mathfrak{F}_0$ von A gehörenden Untergruppen ist eine eindeutig bestimmte Filterbasis von $\mathfrak{F}_0$ und hat als solche die oben für $\mathfrak{E}$ notierten Eigenschaften a) und b). Darüber hinaus enthält $\mathfrak{S}$ mit jeder Untergruppe A_α auch alle Obergruppen von A_α. Wir wollen (in leichter Abänderung der sonst üblichen Bezeichnungsweise) $\mathfrak{S}$ den „charakteristischen *Filter*" von A, die zu $\mathfrak{S}$ gehörenden Untergruppen „charakteristische Untergruppen" von A nennen und allgemein unter einem *Filter* auf A ein System $\mathfrak{U}$ von Nebenscharen von abgeschlossenen Untergruppen von A mit den folgenden Eigenschaften verstehen:

I. Der Durchschnitt je endlich vieler Nebenscharen aus $\mathfrak{U}$ ist eine Nebenschar aus $\mathfrak{U}$.

II. Mit jeder Nebenschar U aus $\mathfrak{U}$ gehören auch alle U enthaltenden abgeschlossenen Nebenscharen zu $\mathfrak{U}$.

Ein Teilsystem $\mathfrak{B}_\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{E}_\mathfrak{U}$ von zu $\mathfrak{U}$ gehörenden Nebenscharen heißt eine Basis bzw. ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{U}$, wenn $\mathfrak{U}$ aus den zu $\mathfrak{B}_\mathfrak{U}$ bzw.

[5]) Man beachte, daß die von uns betrachteten Gruppen im allgemeinen weder kompakt noch lokalkompakt noch linearkompakt noch diskret zu sein brauchen.

[6]) Wegen der im folgenden auftretenden allgemeinen topologischen Begriffsbildungen — insbesondere den Filterbegriff — vgl. Bourbaki: Topologie Générale, Kap. I—III. Paris 1951.

$\mathfrak{E}_{\mathfrak{U}}$ gehörenden Nebenscharen durch Hinzunahme aller abgeschlossener Oberscharen bzw. durch Hinzunahme aller endlicher Durchschnitte und aller abgeschlossener Oberscharen derselben entsteht.

Der Filter $\mathfrak{U}$ möge ein CAUCHY-*Filter* heißen, wenn gilt:

III. $\mathfrak{U}$ enthält zu jeder charakteristischen Untergruppe eine Nebenschar.

Der Durchschnitt aller Scharen eines CAUCHY-Filters enthält höchstens ein Element von A. Besitzt jeder CAUCHY-Filter einen nicht leeren Durchschnitt, so ist A *„vollständig"*. Besitzt sogar jeder Filter einen nicht leeren Durchschnitt, so ist A *„linear kompakt"* [7]).

Nach bekannten Sätzen läßt sich die Gruppe A in im wesentlichen eindeutiger Weise in eine vollständige Gruppe $\hat{A}$ einbetten und mit A hat auch $\hat{A}$ eine Untergruppentopologie [8]). Wir bezeichnen $\hat{A}$ als die „vollständige Hülle" von A. Sind A_α die charakteristischen Untergruppen von A, so sind die vollständigen Hüllen $\hat{A}_\alpha$ von A_α genau die charakteristischen Untergruppen von $\hat{A}$ [8]).

Eine vollständige Gruppe A mit einer Untergruppentopologie ist genau dann kompakt [9]), wenn jede charakteristische Untergruppe von endlichem Index in A ist. Sie ist genau dann lokal kompakt, wenn sie eine kompakte charakteristische Untergruppe besitzt. — Abgeschlossene Untergruppen und Restklassengruppen nach solchen von kompakten bzw. linear kompakten Gruppen sind wieder kompakt bzw. linear kompakt. Jede kompakte Gruppe ist linear kompakt, während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht.

Sind τ_1, τ_2 zwei Untergruppentopologien auf der Gruppe A, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ihre charakteristischen Filter, so heißt τ_1 „gröber" als τ_2, τ_2 „feiner" als τ_1, in Zeichen $\tau_1 \leqq \tau_2$, wenn $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Sind die Untergruppentopologien τ_1, τ_2 mit den charakteristischen Filtern $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nicht vergleichbar vermöge der Relation $\leqq$, so gilt jedenfalls für die durch den Vereinigungsfilter $\mathfrak{F}$ [10]) von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ definierte Topologie τ von A: $\tau_1 \leqq \tau$, $\tau_2 \leqq \tau$. Die Untergruppentopologien τ der Gruppe A bilden also hinsichtlich der Relation $\leqq$ eine „gerichtete Menge", die als eindeutig bestimmtes Maximum die diskrete Topologie besitzt, deren charakteristischer Filter die Nullgruppe enthält. —

Unter einem *„topologischen Homomorphismus"* der Gruppe A auf die Gruppe A' verstehen wir einen stetigen Homomorphismus von A auf A', der offene Mengen in offene Mengen überführt. Die kanonische Abbildung von A auf ihre Restklassengruppe A/B nach einer abgeschlossenen Untergruppe B ist stets ein topologischer Homomorphismus, wenn in A/B die übliche durch die Topologie von A induzierte Topologie zugrunde gelegt wird [11]).

[7]) Vgl. LEFSCHETZ: Algebraic topology, S. 78f. New York 1942.

[8]) BOURBAKI, [6]), Kap. III, § 3, Theorème 2 und Proposition 7.

[9]) Ein topologischer Raum R heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von R eine endliche Teilüberdeckung enthält — vgl. BOURBAKI [6]) Kap. I, § 10 und HALL [1]) Theorem 3.5.

[10]) Unter dem „Vereinigungsfilter" $\mathfrak{F}$ der Filter $\mathfrak{F}_\alpha$ ist natürlich der von den Mengen aus allen $\mathfrak{F}_\alpha$ zusammen erzeugte Filter zu verstehen.

[11]) Vgl. BOURBAKI [6]) Kap. I, § 9, Nr. 1 und Kap. III, § 2, Nr. 4.

Geht insonderheit nur die Nullgruppe von A in die Nullgruppe der Bildgruppe A' über, so haben wir einen „topologischen Isomorphismus". Die Abbildung ist dann in beiden Richtungen stetig, d.h. homöomorph. Die Eigenschaft der Vollständigkeit ist invariant gegenüber topologischen Isomorphismen[12]), die der Kompaktheit und linearen Kompaktheit bleibt auch bei topologischen Homomorphismen erhalten. —

Unter der „*direkten Summe*" einer Menge von Gruppen $A^{(\alpha)}$ (in Zeichen $\sum \oplus A^{(\alpha)}$) verstehen wir hier die aus allen eindeutigen *endlichen* Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende Gruppe mit der folgenden Topologie: Ist zu jedem α irgendeine charakteristische Untergruppe $A_\beta^{(\alpha)}$ von $A^{(\alpha)}$ gegeben, so sei $\sum_\alpha \oplus A_\beta^{(\alpha)}$ eine charakteristische Untergruppe von $\sum \oplus A^{(\alpha)}$[13]). — Im Gegensatz dazu verstehen wir unter der „(*direkten*) TYCHONOFF-*Summe*" der $A^{(\alpha)}$ (in Zeichen $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$) die aus allen *unendlichen* Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende „Produktgruppe" mit der üblichen Produkttopologie[14]). – Sind B_1 und B_2 abgeschlossene Untergruppen der Gruppe A, so sei $B_1 + B_2$ ihre topologische Vereinigungsgruppe, d.h. die (in A) abgeschlossene Hülle ihrer gewöhnlichen Vereinigungsgruppe. $B_1 + B_2$ heißt wie üblich die *direkte* Summe von B_1 und B_2, wenn $B_1 \cap B_2 = 0$ — in Zeichen $B_1 \oplus B_2$. Ein System von Elementen $a_\alpha \in A$ heißt ein „*topologisches Erzeugendensystem*" von A, wenn A die (in A) abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen von den a_α erzeugten Untergruppe von A ist. —

2. Wir notieren noch einige speziell für Gruppen mit einer Untergruppentopologie gültige Sätze:

a) *Eine Untergruppe B der Gruppe A ist genau dann abgeschlossen in A, wenn B als Durchschnitt geeigneter charakteristischer Untergruppen A_{α_B} darstellbar ist.*

Die Abgeschlossenheit von $\bigcap A_{\alpha_B}$ ist klar. Sei umgekehrt B abgeschlossen in A, $b \in \bigcap_\alpha (A_\alpha + B)$. Aus $b \in A_\alpha + B$ folgt $b = a_\alpha + b_\alpha$ $(a_\alpha \in A_\alpha,\ b_\alpha \in B)$, also $b \equiv b_\alpha \pmod{A_\alpha}$. In jeder Umgebung von b liegt also ein $b_\alpha \in B$, d.h. b ist Häufungspunkt von B, also $b \in B$ und $B = \bigcap_\alpha (A_\alpha + B) = \bigcap A_{\alpha_B}$.

Aus a) folgt sofort:

b) *Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A und $\bar{x}$ eine Nebenschar mod B, so ist der Durchschnitt der $\bar{x}$ enthaltenden Nebenscharen der Gruppen $A_\alpha + B$ gleich $\bar{x}$.*

[12]) Man beachte, daß die Vollständigkeitseigenschaft bei nur homöomorphen Abbildungen im allgemeinen nicht erhalten bleibt. Die Invarianz der Vollständigkeit gegenüber topologischen Isomorphismen von Gruppen ist fast trivial.

[13]) Vgl. KAPLAN, S.: Extension of the Pontrjagin Duality. I. Duke Math. J. **15**, 649—658 (1948).

Die hier der direkten Summe $\sum \oplus A^{(\alpha)}$ zugeschriebene Topologie ist identisch mit der in der zitierten Arbeit eingeführten „asterisk-topology", bzw. „rectangular-topology" (beide fallen bei Untergruppentopologien zusammen).

[14]) Im Falle endlich vieler Summanden $A^{(\alpha)}$ sind $\sum \oplus A^{(\alpha)}$ und $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ offenbar identisch.

c) A genüge der Voraussetzung: Ist $\bar{x}$ eine abgeschlossene Nebenschar in A, so bildet das System aller $\bar{x}$ enthaltenden Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen von A ein vollständiges Umgebungssystem von $\bar{x}$. Dann gilt:

Sind B und F abgeschlossene Untergruppen von A, so ist die gewöhnliche Vereinigungsgruppe G von B und F abgeschlossen in A, also gleich $B+F$.

Denn sei $x \notin G$, $\bar{x}$ die Nebenschar von $x \bmod B$. G ist die Vereinigungsmenge genau der B-Nebenscharen, die ein Element von F enthalten und es gilt $\bar{x} \cap G = \emptyset$, $\bar{x} \cap F = \emptyset$. Ist U das Komplement von F in A, so ist U offen, $\bar{x} \subseteq U$, also U eine Umgebung von $\bar{x}$ und nach Voraussetzung gibt es eine charakteristische Gruppe $A_{\infty_0} + B$, deren $\bar{x}$ enthaltende Nebenschar U_0 in U liegt. Aus $U \cap F = \emptyset$ folgt $U_0 \cap F = \emptyset$. Da auch U_0 aus gewissen B-Nebenscharen besteht, folgt hieraus sogar $U_0 \cap G = \emptyset$. Ist X das Komplement von G in A, so enthält also X mit jedem $x \in X$ eine ganz zu X gehörige Umgebung von x, d.h. X ist offen, also $G = B + F$ abgeschlossen.

Unter den Voraussetzungen von c) *gilt,* wie mühelos zu sehen:

d) *Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A, so führt die kanonische Abbildung von A auf die Restklassengruppe A/B abgeschlossene Untergruppen in abgeschlossene Untergruppen über.*

3. (a) sei die kleinste das Element $a \in A$ enthaltende abgeschlossene Untergruppe von A[15]).

Definition. Ein kommutativer topologischer (Links-) Multiplikatorenring P mit Einselement von A möge als ein *„natürlicher Operatorenbereich"* von A bezeichnet werden, wenn außer den gewöhnlichen Multiplikatoraxiomen[16]) folgende Bedingungen erfüllt sind:

Ist M eine beliebige Untermenge von P, $\widetilde{M \cdot a}$ die (in A) abgeschlossene Hülle von $M \cdot a$, $\tilde{M}$ die (in P) abgeschlossene Hülle von M, so gelte

I. $P \cdot a = (a)$ für jedes $a \in A$.

II. $\widetilde{M \cdot a} = \tilde{M} \cdot a$ für jedes $a \in A$ und jede Untermenge $M \subseteq P$.

Aus der Definition des natürlichen Operatorenbereiches folgt sofort:

Besitzt A den natürlichen Operatorenbereich P, so ist jede abgeschlossene Untergruppe B von A bezüglich P zulässig, d.h. $P \cdot B = B$.

Umgekehrt braucht aus der Zulässigkeit einer Untergruppe von A bezüglich P im allgemeinen natürlich nicht ihre Abgeschlossenheit in A zu folgen. Unter P^+ verstehen wir im folgenden stets die Additionsgruppe des Ringes P mit P als Multiplikatorenbereich.

Satz 1. Sei P ein natürlicher Operatorenbereich von A, $a \in A$. Die Menge P_a aller $\varrho \in P$ mit $\varrho \cdot a = 0$ ist ein (in P) abgeschlossenes Ideal und die Ab-

[15]) Wir werden (a) auch als eine „zyklische Hülle" im Gegensatz zu der aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ von a bestehenden gewöhnlichen zyklischen Gruppe $\langle a \rangle$ bezeichnen.

[16]) Für jedes $a, b \in A$; $\alpha, \beta \in P$: $\alpha \cdot a \in A$, $(\alpha+\beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$, $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, $1 \cdot a = a$ (1 Einselement von P).

bildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist ein abgeschlossener topologischer Homomorphismus[17]) von P^+ auf $P \cdot a = (a)$.

Beweis. (1) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist stetig. Denn ist $B \subset P \cdot a$ abgeschlossen in $P \cdot a$, M_B das vollständige Urbild von B bezüglich der Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$, so ist $M_B \cdot a \subseteq B$, wegen der Abgeschlossenheit von B aber auch $\widetilde{M}_B \cdot a = \widetilde{M_B \cdot a} \subseteq B$, also $M_B = \widetilde{M}_B$ abgeschlossen in P. (2) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist abgeschlossen, denn aus $M = \widetilde{M}$ abgeschlossen in P folgt $M \cdot a = \widetilde{M} \cdot a = \widetilde{M \cdot a}$ abgeschlossen in $P \cdot a$. (3) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist also ein stetiger abgeschlossener Homomorphismus von P^+ auf $P \cdot a$ und die aus allen $\varrho \in P$ mit $\varrho \cdot a = 0$ bestehende Urbildmenge P_a der 0 von $P \cdot a$ ist abgeschlossen. P_a ist offenbar ein Ideal in P und $P \cdot a$ gruppentheoretisch isomorph zur Restklassengruppe P^+/P_a^+, wo P^+ bzw. P_a^+ die Additionsgruppen von P bzw. P sind. (4) Der durch die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ induzierte Isomorphismus von P^+/P_a^+ auf $P \cdot a$ führt abgeschlossene Mengen aus P^+/P_a^+ in abgeschlossene Mengen aus $P \cdot a$ über, denn bei der kanonischen Abbildung von P^+ auf P^+/P_a^+ entsprechen abgeschlossenen Mengen aus P^+/P_a^+ abgeschlossene Urbilder aus P^+ und diesen, wie unter (2) bewiesen, abgeschlossene Bilder in $P \cdot a$. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von P^+/P_a^+ auf $P \cdot a$ gehen dann aber auch die Komplemente der abgeschlossenen Mengen, d.h. die offenen Mengen aus P^+/P_a^+ in Komplemente von abgeschlossenen Mengen, also in offene Mengen aus $P \cdot a$ über. Da die kanonische Abbildung von P^+ auf P^+/P_a^+ bekanntlich offene Mengen in offene Mengen überführt, ist auch die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ von P auf $P \cdot a$ offen. Damit ist alles bewiesen.

Das abgeschlossene Ideal $P_a \subseteq P$ mit $P_a \cdot a = 0$ wird wie üblich als *„Ordnungsideal"* von a bezeichnet. Ist P_* der Durchschnitt aller Ordnungsideale der Elemente von A, dann ist auch $P^* = P/P_*$ ein natürlicher Operatorenbereich von A, in welchem der Durchschnitt aller Ordnungsideale das Nullideal ist. Soweit nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, wollen wir im folgenden immer stillschweigend voraussetzen, daß der Durchschnitt aller Ordnungsideale gleich 0 ist.

Definition. Die Gruppe A heißt „zyklohomogen", wenn sie einen natürlichen Operatorenbereich P besitzt mit der Eigenschaft, daß P^+ eine Untergruppentopologie besitzt und P natürlicher Operatorenbereich von P^+ ist.

Besitzt P die obige Eigenschaft, dann muß die in P^+ abgeschlossene Hülle (1) der aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times 1$ der $1 \in P$ bestehenden zyklischen Gruppe identisch mit der additiven Gruppe $P \cdot 1 = P^+$ sein und aus der Zyklohomogenität von A (bezüglich P) folgt, daß alle zyklischen Hüllen aus A aus einer einzigen — nämlich P^+ — durch Restklassengruppenbildung abgeleitet werden können — genau so, wie im diskreten Falle alle zyklischen Gruppen aus der Additionsgruppe der ganzrationalen Zahlen entstehen.

[17]) Eine Abbildung heißt „abgeschlossen" bzw. „offen", wenn sie abgeschlossene bzw. offene Mengen in abgeschlossene bzw. offene Mengen transformiert.

Wir notieren einige Eigenschaften von P, die sich aus der Voraussetzung, daß P natürlicher Operatorenbereich von P^+ ist, ergeben:

a) Die aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times 1$ von $1 \in P$ bestehende gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle 1 \rangle$ liegt dicht in P^+. Dies wurde schon oben bemerkt.

b) Ist P diskret, so isomorph zum Ring der ganzrationalen Zahlen oder zu einem Restklassenring desselben.

Denn nach a) ist $P \cdot 1 = P^+ = \langle 1 \rangle$.

c) Die charakteristischen Untergruppen P_α^+ von P^+ sind Ideale P_α in P.

Denn die P_α^+ sind abgeschlossen in P^+, also zulässig gegenüber P. —

Natürlich bilden die Ideale P_α ein vollständiges System von Nullumgebungen in P.

d) Ist P nicht diskret, so ist jedes $\varrho \in P$ von endlicher Ordnung modulo jedem Umgebungsideal P_α.

Denn $\langle 1 \rangle$ liegt nach a) dicht in P^+ und wenn P und damit P^+ nicht diskret ist, so ist auch $\langle 1 \rangle$ nicht diskret. Die Umgebungsuntergruppen $\langle 1 \rangle_\alpha = \langle 1 \rangle \cap P_\alpha^+$ von $\langle 1 \rangle$ sind daher $\neq (0)$ und 1 ist von endlicher Ordnung mod P_α^+, d.h. von endlicher Ordnung mod P_α. Liegt aber $n \times 1$ in P_α, so wegen c) auch $\varrho(n \times 1) = n \times \varrho$ $(\varrho \in P)$.

e) Ist P nicht diskret und vollständig, so ist P topologisch isomorph zu einem Ring von PRÜFERschen ganzen n-adischen Zahlen[18]) und kann also hiermit identifiziert werden.

Umgekehrt folgt übrigens aus bekannten Eigenschaften der ganz-n-adischen Zahlenringe sofort, daß diese natürliche Operatorenbereiche ihrer Additionsgruppen sind und hieraus folgt: Hat eine Gruppe A einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich, so ist A zyklohomogen.

Es ist leicht, auf Grund des oben Bemerkten ein Beispiel für eine nichtzyklohomogene Gruppe zu geben:

Sei A_1 die diskrete Additionsgruppe der ganzrationalen Zahlen, A_2 die gleiche Gruppe mit einer nicht diskreten Topologie und $A = A_1 \oplus A_2$ die topologische direkte Summe von A_1 und A_2. — Wäre A zyklohomogen mit dem natürlichen Operatorenbereich P, P_1 bzw. P_2 die Ordnungsideale von A_1 bzw. A_2 in P, so wäre $P^+/P_2^+ = A_2$ nicht diskret, also auch P nicht diskret. Andererseits muß $P^+/P_1^+ = A_1$ eine diskrete unendliche zyklische Gruppe sein, was sofort zu einem Widerspruch gegen d) führt. —

Ist A eine zyklohomogene Gruppe mit dem natürlichen Operatorenbereich P, so ist entweder jede zyklische Untergruppe von A diskret (und

[18]) Der Ring $\mathfrak{R}$ aller ganzen PRÜFERschen n-adischen Zahlen entsteht aus dem Ring $\mathfrak{R}_0$ aller ganz rationalen Zahlen, indem man alle Ideale $\neq (0)$ aus $\mathfrak{R}_0$ als Nullumgebungen wählt und dem erhaltenen topologischen Ring CAUCHY-vervollständigt. Unter einem PRÜFERschen Zahlenring $\mathfrak{R}'$ verstehen wir allgemein stets ein abgeschlossenes Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit einem Einselement $1' \in \mathfrak{R}'$ bezüglich $\mathfrak{R}'$. $\mathfrak{R}$ ist direkte TYCHONOFF-Summe $\mathfrak{R} = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_p$ aller ganz-p-adischen Zahlenringe $\mathfrak{R}_p$ (p ganzrationale Primzahl). Für jedes abgeschlossene Ideal $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}'$-Einselement $1'$ gilt dann entweder $\mathfrak{R}_p \subset \mathfrak{R}'$ oder $\mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R}' = 0$ und $\mathfrak{R}' = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_{p'}$, wo p' alle p mit $\mathfrak{R}_p \subset \mathfrak{R}'$ durchläuft. Vgl. PRÜFER, H.: Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie. Math. Ann. **94** (1925).

für P kann der Ring der ganzrationalen Zahlen gewählt werden), oder A besitzt die folgende Eigenschaft

(T): *Jede Restklassengruppe A/A_α von A nach einer charakteristischen Untergruppe A_α enthält nur Elemente von endlicher Ordnung, d.h. A/A_α ist eine Torsionsgruppe.* —

In der Tat. Gibt es eine nichtdiskrete zyklische Untergruppe von A so ist auch P sicher nicht diskret und besitzt die Eigenschaft d). Ist nun $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A, $(a) \cap A_\alpha = (0)$, dann ist $(a) = \langle a \rangle$ diskret und wegen der topologischen Isomorphie von (a) zu einer Restklassengruppe P^+/P_a^+ folgt aus d) die Endlichkeit von (a). Ist aber (a) nicht-diskret, so $(a) \cap A_\alpha \neq (0)$ für alle α und aus der topologischen Isomorphie von (a) und P^+/P_a^+ folgt wieder die Behauptung.

Gruppen mit der Eigenschaft (T) werden wir im folgenden als *„torsionstopologische Gruppen"* bezeichnen.

Wir werden uns im folgenden fast ausschließlich mit Gruppen zu befassen haben, deren zyklische Hüllen (a) $(a \in A)$ vollständig sind (was im besonderen stets der Fall ist, wenn die betrachtete Gruppe selber vollständig ist). Gruppen mit dieser Eigenschaft nennen wir *„zyklovollständig"*.

Ist A eine Gruppe, die eine diskrete zyklische Hülle von unendlicher Ordnung enthält und ist A zyklohomogen, so folgt aus den vorangegangenen Bemerkungen, daß A den Ring der ganzrationalen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich besitzt und zyklovollständig ist. Die zyklovollständigen zyklohomogenen Gruppen ohne diskrete zyklische Hüllen von unendlicher Ordnung werden gekennzeichnet durch

Satz 2. Die Gruppe A sei zyklovollständig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

I. A besitzt einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich.

II. A ist zyklohomogen und enthält keine diskrete unendliche zyklische Hülle.

III. A ist torsionstopologisch.

Beweis. Aus I. folgt II., aus II. folgt III. — wie oben gezeigt. Bleibt zu beweisen, daß jede zyklovollständige torsionstopologische Gruppe einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich besitzt[19]). Sei also $a \in A$, (a) die abgeschlossene, also vollständige Hülle der von den ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ gebildeten gewöhnlichen zyklischen Gruppe $\langle a \rangle$. Jedes $a' \in (a)$ ist Limes eines CAUCHY-Filters in (a) und umgekehrt besitzt jeder CAUCHY-Filter in (a) einen Limes. $\mathfrak{F}^{(a)}$ sei der charakteristische Filter von (a). Es genügt, als CAUCHY-Filter in (a) einen aus Nebenscharen nach den $A_\alpha^{(a)} \in \mathfrak{F}^{(a)}$ bestehenden Filter zu nehmen. Sei nun zu jedem α eine Nebenschar $U_\alpha^{(a)}$ von $A_\alpha^{(a)}$ gegeben. Da die ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ von a dicht in (a) liegen, gibt es in jedem $U_\alpha^{(a)}$ ganzrationale Vielfache $n_\alpha \times a$ und

[19]) Vgl. hierzu den ganz analogen Beweis bei PIETRKOWSKI, ST.: Theorie der Abelschen Gruppen. Math. Ann. **104** (1931).

die n_α für welche $n_\alpha \times a \in U_\alpha^{(a)}$ ist, bilden in der Additionsgruppe $\mathfrak{R}_0^+$ der ganzrationalen Zahlen eine Restklasse $V_\alpha^{(a)}$ modulo der Ordnung $m_\alpha^{(a)}$ von $a \bmod A_\alpha^{(a)}$. Die $U_\alpha^{(a)}$ bilden dann und nur dann einen Filter, wenn das gleiche für die Restklassen $V_\alpha^{(a)}$ im Bereich der ganzrationalen Zahlen gilt. In diesem Falle definieren die $V_\alpha^{(a)}$ eine ganz-n-adische Zahl ν und wir bezeichnen den Limes des Filters $\{U_\alpha^{(a)}\}$ mit $\nu \cdot a$. Dann gehört zu jeder ganz-n-adischen Zahl ν ein $\nu \cdot a \in (a)$ und jedes Element von (a) läßt sich eindeutig in dieser Form ausdrücken. Man sieht leicht, daß die damit eingeführten n-adischen Operatoren den üblichen Multiplikatoraxiomen genügen und daß (a) topologisch homomorph ist zur Additionsgruppe der ganz-n-adischen Zahlen. A besitzt also den PRÜFERschen Ring $\mathfrak{R}$ der ganz-n-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich.

4. *Definition.* Die Gruppe A heißt „primär" (zur Primzahl p gehörig), wenn für jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteqq A$ gilt: Ist $a \in A$ ein Element endlicher Ordnung mod B, so ist die Ordnung von a mod B eine Potenz von p.

Jede abgeschlossene Untergruppe einer primären Gruppe A und jede Restklassengruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe von A ist offenbar gleichfalls primär.

Satz 3. A ist dann und nur dann primär (zur Primzahl p gehörig), wenn jedes $a \in A$ modulo jeder charakteristischen Untergruppe A_α, in der es nicht enthalten ist, eine Potenz von p zur Ordnung hat.

Beweis. A sei primär, $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A und $a \notin A_\alpha$. Wäre a von unendlicher Ordnung mod A_α, so wäre die von a erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe diskret, also abgeschlossen in A und sicher nicht primär — Widerspruch. Mithin ist a von endlicher Ordnung mod A_α und folglich sogar von p-Potenzordnung mod A_α. — Umgekehrt sei jedes $a \in A$ mit $a \notin A_\alpha$ von p-Potenzordnung mod A_α, B eine abgeschlossene Untergruppe von A und a von endlicher Ordnung mod B. Gehen wir in die von a erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle a \rangle$, so wird die Relativtopologie von $\langle a \rangle$ durch die charakteristischen Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ definiert, während $\langle a \rangle \cap B$ abgeschlossen in $\langle a \rangle$ und somit Durchschnitt gewisser Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ ist. Hieraus folgt leicht, daß $\langle a \rangle \cap B$ mit einer der Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ zusammenfallen muß und a somit von Primzahlpotenzordnung mod B ist.

Satz 4. Eine zyklovollständige Gruppe A ist dann und nur dann primär, wenn sie den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich besitzt. — Eine zyklovollständige primäre Gruppe ist stets zyklohomogen.

Beweis. A habe den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich. Sei $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe und $a \notin A_\alpha$. (a) ist topologisch homomorphes Bild von $\mathfrak{R}_p^+$ und a ist von p-Potenzordnung mod der charakteristischen Untergruppe $(a) \cap A_\alpha$ von (a) und also von gleicher Ordnung mod A_α. Mithin ist A primär. — Ist umgekehrt A

primär und zyklovollständig, so ist entweder jedes A-Element von endlicher p-Potenzordnung oder es gibt Elemente $a \in A$ von unendlicher Ordnung und für diese ist (a) topologisch isomorph zu $\mathfrak{R}_p^+$, woraus leicht folgt, daß und wie $\mathfrak{R}_p$ als natürlicher Operatorenbereich von A zu definieren ist. Die Zyklohomogenität von A folgt aus Satz 2.

Wir leiten nun noch kurz ein Resultat über die Zerlegbarkeit einer beliebigen zyklovollständigen torsionstopologischen Gruppe (wegen dieser Voraussetzung vgl. Satz 2) in primäre Gruppen ab. Nach bekannten Sätzen ist der ganz-n-adische Zahlenring $\mathfrak{R}$ in eindeutiger Weise als direkte TYCHONOFF-Summe $\mathfrak{R} = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_p$ von ganz-p-adischen Zahlenringen $\mathfrak{R}_p$ darstellbar. Ist also A zyklovollständig und torsionstopologisch, d.h. (Satz 2) besitzt den ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichen Operatorenbereich und ist (a) wieder die abgeschlossene Hülle der von $a \in A$ erzeugten zyklischen Gruppe, so ist $(a) = \sum^T \oplus (a_p)$ gleichfalls in eindeutiger Weise als direkte TYCHONOFF-Summe von primären vollständigen zyklischen Hüllen (a_p) darstellbar, wo zu jeder Primzahl p höchstens ein Summand $(a_p) \neq (0)$ gehört. $A^{(p)}$ sei die (abgeschlossene) Vereinigungsgruppe aller zur Primzahl p gehörigen primären vollständigen zyklischen Hüllen von A. Wie leicht zu sehen ist dann $A^{(p)}$ primär und besitzt den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich. $A^{(p)}$ ist die zu p gehörige „Primärkomponente" von A. Wir zeigen:

Satz 5. *A sei torsionstopologisch und zyklovollständig, $A^{(p)}$ die zur Primzahl p gehörige Primärkomponente von A. A besteht genau aus allen eindeutigen endlichen Summen $\sum_p a_p$ $(a_p \in A^{(p)})$ und denjenigen gleichfalls eindeutigen unendlichen Summen $\sum_p a_p$ $(a_p \in A^{(p)})$, für welche alle a_p in einer kompakten Untergruppe von A liegen.* —

Beweis. Zunächst ist klar, daß A alle endlichen Summen $\sum_p a_p$ enthält. Seien nun abzählbar viele Elemente $a_p \in A^{(p)}$ gegeben, wo die Primzahlen p alle verschieden sind und die in einer kompakten (also sicher vollständigen) Untergruppe $B \subseteq A$ liegen. Wird für B die kleinste alle a_p enthaltende abgeschlossene Untergruppe von A genommen, so besitzt B wegen der Kompaktheit eine charakteristische Basis, die aus einer absteigenden Kette von Untergruppen von endlichem Index in B besteht und es ist B nach bekannten Sätzen eindeutig darstellbar als direkte TYCHONOFF-Summe von primären Gruppen $B^{(p)}: B = \sum_p^T \oplus B^{(p)}$ [20]). Dann muß $a_p \in B^{(p)}$ sein und die Existenz der unendlichen Summe $\sum_p a_p$ folgt aus den Eigenschaften der TYCHONOFF-Summe. — Sei umgekehrt $a \in A$, $a \neq 0$, (a) die abgeschlossene Hülle der von a erzeugten zyklischen Gruppe. Dann ist (a) kompakt und $(a) = \sum_p^T \oplus (a_p)$ wieder direkte TYCHONOFF-Summe der primären (a_p) und $a = \sum_p a_p$. —

[20]) PIETRKOWSKI, ST.: [19]) § 4.

5. Auf ein und derselben abstrakten Gruppe A sind im allgemeinen natürlich verschiedene Topologien möglich.

Definition. Zwei (Untergruppen-)Topologien τ_1 und τ_2 auf A mögen äquivalent heißen, $\tau_1 \sim \tau_2$, wenn für jedes $a \in A$ gilt: Die abgeschlossene Hülle $(a)^{(\tau_1)}$ der von (a) erzeugten zyklischen Gruppe bezüglich der Topologie τ_1 ist (elementweise und topologisch) identisch mit der abgeschlossenen Hülle $(a)^{(\tau_2)}$ bezüglich der Topologie τ_2. —

Es ist klar, daß die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation für die Menge aller Untergruppentopologien auf A ist und diese in Äquivalenzklassen T — im folgenden kurz als „Topologienklassen" bezeichnet — einteilt. Fast trivial ist

Satz 6. Sind τ_1 und $\tau_2 \sim \tau_1$ zwei äquivalente Topologien auf A und besitzt A bezüglich τ_1 den natürlichen Operatorenbereich P, so ist P (mit derselben Operatormultiplikation!) auch natürlicher Operatorenbereich bezüglich τ_2. — Besitzt A umgekehrt bezüglich der Topologien τ_1 und τ_2 denselben natürlichen Operatorenbereich P (beidemale mit derselben Operatormultiplikation), so ist $\tau_1 \sim \tau_2$. —

Sei nun T eine Topologienklasse der Gruppe A, $\mathfrak{S}^{(\tau)}$ der zur Topologie $\tau \in T$ gehörige charakteristische Filter in A. Dann erzeugt das System aller Untergruppen, die zu (mindestens) einem der $\mathfrak{S}^{(\tau)}$ $(\tau \in T)$ gehören, wieder einen Filter $\mathfrak{S}$ [0] in A, der eine Topologie τ_0 in A definiert. τ_0 ist die (eindeutig bestimmte) feinste Topologie aus T, das „Maximum" der Topologien $\tau \in T$. —

In der Tat. Daß τ_0 die obere Grenze der $\tau \in T$ ist, ist klar und $\tau_0 \in T$ folgt so: Sei $\tau \in T$, $a \in A$, $\langle a \rangle$ die von a erzeugte (gewöhnliche) zyklische Gruppe, $b \in A$ ein Häufungspunkt von $\langle a \rangle$ bei der Topologie τ. Dann liegt in jeder τ-Umgebung von b, d.h. also in jeder b enthaltenden Nebenschar der charakteristischen τ-Untergruppen ein $a' \in \langle a \rangle$ und dies gilt für alle $\tau \in T$. Die Gesamtheit aller dieser Nebenscharen für alle $\tau \in T$ bildet aber gerade ein vollständiges τ_0-Umgebungssystem von b[21]) und b ist Häufungspunkt von $\langle a \rangle$ auch bezüglich der Topologie τ_0. Danach ist die abgeschlossene Hülle von $\langle a \rangle$ bezüglich τ_0 identisch mit der abgeschlossenen Hülle bezüglich $\tau \in T$ und es folgt $\tau_0 \in T$. Wir haben also

Satz 7. Ist T eine Topologienklasse von A, so gibt es eine eindeutig bestimmte feinste Topologie τ_0 aus T. —

Wir bezeichnen τ_0 hinfort als die zur Klasse T gehörige „*S-Topologie*".

6. Wir betrachten nunmehr Gruppen A mit einer S-Topologie unter der weiteren Voraussetzung, daß A zyklovollständig und torsionstopologisch ist, d.h. einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich besitzt. Wir bemerken zunächst:

a) Ist (a) eine zyklische Hülle mit einem PRÜFERschen ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichem Operatorenbereich, ist ferner $\alpha \in \mathfrak{R}$, so ist die

[21]) Man beachte, daß die zyklische Hülle (a) von a für alle $\tau \in T$ dieselbe ist und daß in (a) der Durchschnitt je endlich vieler zu verschiedenen $\tau \in T$ gehöriger Umgebungen von b wieder eine τ-Umgebung von b für jedes $\tau \in T$ enthält.

$\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe $[\mathfrak{R} \cdot \alpha] \cdot a$ abgeschlossen in (a). $[\mathfrak{R} \cdot \alpha] \cdot a$ ist genau dann eine charakteristische Untergruppe von (a), wenn α in $\mathfrak{R}$ zu einer endlichen natürlichen Zahl assoziiert ist. Dies folgt leicht aus bekannten Eigenschaften der n-adischen Zahlenringe.

b) Aus a) folgt: Ist B eine $\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe von endlichem Index in (a), so ist B eine charakteristische Untergruppe von (a).

c) Aus b) folgt: Ist A eine Gruppe mit dem n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichem Operatorenbereich und einer S-Topologie, ist ferner B eine $\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe von A mit der Eigenschaft, daß A/B nur Elemente von endlicher Ordnung enthält, dann ist B eine charakteristische Untergruppe von A. — Denn B würde, wenn sie anderenfalls zum charakteristischen Filter von A hinzugenommen würde, die Topologie der zyklischen Gruppen $(a) \subseteq A$ wegen b) nicht ändern und aus der „Maximaleigenschaft" der S-Topologie folgt, daß B charakteristische Untergruppe von A sein muß. — Da nach Satz 2 auch umgekehrt jede charakteristische Untergruppe von A die Eigenschaft haben muß, daß die nach ihr gebildete Restklassengruppe nur Elemente von endlicher Ordnung enthält, erhalten wir

Satz 8. Hat A eine S-Topologie und einen ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichen Operatorenbereich, so besteht der charakteristische Filter von A genau aus allen $\mathfrak{R}$-zulässigen Untergruppen $B \subseteq A$ mit der Eigenschaft, daß A/B nur Elemente von endlicher Ordnung enthält. —

Hinsichtlich der Zerlegbarkeit der S-topologischen Gruppen mit ganz-n-adischem natürlichem Operatorenbereich in Primärkomponenten beweisen wir nun noch das Satz 5 ergänzende Resultat:

Ist A S-topologisch mit dem Ring $\mathfrak{R}$ der ganz-n-adischen Zahlen als natürlichem Operatorenbereich, so ist jede Primärkomponente $A^{(p)}$ von A gleichfalls S-topologisch (und besitzt nach Satz 4 den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich) [22]).

Wir haben zu zeigen, daß die Relativtopologie der Untergruppen $A^{(p)}$ identisch ist mit der zu dem natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ von $A^{(p)}$ gehörigen S-Topologie. Wäre die Relativtopologie von $A^{(p)}$ nicht dieselbe wie die durch $\mathfrak{R}_p$ bestimmte S-Topologie, so gäbe es eine charakteristische Untergruppe $A_1^{(p)} \subseteq A^{(p)}$ der S-Topologie, welche nicht charakteristische Untergruppe für die Relativtopologie wäre. Verfeinern wir die Topologie von A durch Hinzunahme der (sicher direkten) Summe $A_1^{(p)} \oplus B$, wo B die topologische Vereinigungsgruppe aller $A^{(p')}$ $(p' \neq p)$ ist, zum charakteristischen Filter von A und betrachten wir wieder die zyklische Hülle $(a) = \sum^T \oplus (a^{(p)})$ eines beliebigen $a \in A$, so ist sofort zu sehen, daß die Relativtopologie von (a) durch

[22]) Eine direkte Summe $A = \sum \oplus A^{(\alpha)}$ von S-topologischen Gruppen $A^{(\alpha)}$ ist, wie leicht zu sehen, wieder eine S-topologische Gruppe. Auf der anderen Seite beachte man, daß auch eine TYCHONOFF-Summe von S-topologischen Gruppen wieder S-topologisch sein kann. So ist die S-topologische Gruppe $\mathfrak{R}^+$ der ganzen n-adischen Zahlen direkte TYCHONOFF-Summe der primären Gruppen $\mathfrak{R}_p^+$, wo $\mathfrak{R}_p^+$ die Additionsgruppe der ganzen p-adischen Zahlen ist; eine TYCHONOFF-Summe von unendlich vielen zur gleichen Primzahl gehörigen Gruppen ist hingegen niemals S-topologisch.

die Verfeinerung der Topologie von A nicht verändert wird und da A die S-Topologie besitzt, muß $A_1^{(p)} \oplus B$ charakteristische Untergruppe von A, also $A_1^{(p)}$ charakteristische Untergruppe von $A^{(p)}$ bezüglich der Relativtopologie sein. Hieraus folgt die Behauptung. — .

7. Wir wollen nun die zyklovollständigen S-topologischen primären Gruppen genauer untersuchen und setzen also in dieser Nummer voraus, daß A eine Gruppe mit dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichem Operatorenbereich und der zugehörigen S-Topologie ist. Soweit nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, sollen unter „Untergruppen" von A stets $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppen verstanden sein. Zunächst gilt:

Satz 9. Jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteq A$ hat gleichfalls die S-Topologie als Relativtopologie in A.

Beweis. B' sei eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe von B, so daß B/B' nur Elemente von endlicher Ordnung enthält. Zu zeigen ist die Existenz einer charakteristischen Untergruppe A' von A mit $B \cap A' = B'$. Sei nun $C \subseteq A$ die Menge aller A-Elemente von endlicher Ordnung mod B'. C ist eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe von A. Da die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Kette $\mathfrak{R}_p$-zulässiger Untergruppen wieder eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe ist, gibt es eine größte zulässige Untergruppe $A_0' \subseteq A$ mit $A_0' \cap C = 0$, erst recht also $A_0' \cap B = A_0' \cap B' = 0$. In wohlbekannter Weise folgt nun aus der Maximaleigenschaft von A_0', daß jedes $a \in A$ von endlicher Ordnung mod $A_0' \oplus C$ und also auch von endlicher Ordnung mod $A' = A_0' \oplus B'$ ist. Nach Satz 8 ist also A' eine charakteristische Untergruppe von A und wegen $B \cap A_0' = 0$ ist $A' \cap B = B'$, also B' eine (bezüglich der Relativtopologie) charakteristische Untergruppe von B. — Daß umgekehrt jede (bezüglich der Relativtopologie) charakteristische Untergruppe B' von B $\mathfrak{R}_p$-zulässig ist und daß jedes Element von B von endlicher Ordnung mod B' sein muß, ist fast trivial. Satz 8 liefert jetzt die Behauptung.

Ist $T(A)$ die (sicher $\mathfrak{R}_p$-zulässige) Torsionsgruppe von A, d.h. die Untergruppe aller Elemente von endlicher Ordnung aus A, so folgt sofort der

Korollar. $T(A)$ ist diskret und also abgeschlossen in A. Denn die S-Topologie der primären Torsionsgruppe $T(A)$ ist nach Satz 8 diskret, da die Nullgruppe charakteristische Untergruppe ist.

Die Bedeutung der primären S-Topologien liegt nun wesentlich in der Gültigkeit von

Satz 10. Besitzt die S-topologische Gruppe A den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich, so ist eine Untergruppe $B \subseteq A$ dann und nur dann abgeschlossen in A, wenn sie $\mathfrak{R}_p$-zulässig ist[23]).

Beweis. Ist B abgeschlossen, dann $\mathfrak{R}_p$-zulässig, wie schon oben festgestellt wurde. Sei B $\mathfrak{R}_p$-zulässig. Dann besitzt mit A auch die Restklassen-

[23]) Im nichtprimären Fall gilt der Satz im allgemeinen nicht, wie das Beispiel der Additionsgruppe $\mathfrak{R}^+$ der ganzen n-adischen Zahlen zeigt: Sind die $\mathfrak{R}_p^+$ die primären Komponenten von $\mathfrak{R}^+$, so ist die gewöhnliche Summe $\sum \oplus \mathfrak{R}_p^+$ sicher nicht abgeschlossen in $\mathfrak{R}^+$.

gruppe $\bar{A} = A/B$ den Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ (im gewöhnlichen Sinne). Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes zeigt man leicht, daß es zu jedem $\bar{a} \neq \bar{0}$ aus $\bar{A}$ eine größte $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe $\bar{A}_\alpha \subset \bar{A}$ mit $\bar{a} \notin \bar{A}_\alpha$ gibt. In der Restklassengruppe $\bar{A}/\bar{A}_\alpha$ muß dann jede (zulässige) Untergruppe die zu $\bar{a} \in \bar{A}$ gehörige Restklasse $\bar{\bar{a}}$ aus $\bar{A}/\bar{A}_\alpha$ enthalten und hieraus folgt in bekannter Weise, daß alle Elemente von $\bar{A}$ von endlicher Ordnung mod $\bar{A}_\alpha$ sind. Ist A_α das vollständige Urbild von $\bar{A}_\alpha$ in A, so ergibt sich: Zu jedem $a \in A$ mit $a \notin B$ gibt es eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe $A_\alpha \subseteq A$ mit $a \notin A_\alpha$ und so, daß jedes Element von A von endlicher Ordnung mod A_α ist. Aus ersterem folgt, daß der Durchschnitt aller dieser A_α gleich B sein muß und wegen der letzteren Eigenschaft sind die A_α, also auch $B = \bigcap A_\alpha$ abgeschlossen in A w. z. z. w.

Korollar. Ist A eine S-topologische Gruppe mit $\mathfrak{R}_p$ als natürlichem Operatorenbereich, so ist A darstellbar als (topologische) Restklassengruppe einer (gewöhnlichen) direkten Summe $G = \sum \oplus Z_\alpha$ von Gruppen Z_α, die zur Additionsgruppe $\mathfrak{R}_p^+$ topologisch isomorph sind, genommen mit der zum natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ gehörigen S-Topologie, nach einer $\mathfrak{R}_p$-zulässigen (und daher nach Satz 10 abgeschlossenen) Untergruppe $G' \subseteq G$.

Denn die Darstellung $A = G/G'$ ist, wenn man G, G', A als gewöhnliche Operatorgruppen auffaßt, bekannt. Daß dabei die S-Topologie von A als Restklassengruppentopologie richtig herauskommt, folgt wegen der Abgeschlossenheit von G' sofort aus Satz 8.

8. Sei A wieder eine zyklovollständige torsionstopologische Gruppe. Unter „Untergruppen" sollen in dieser Nummer stets abgeschlossene Untergruppen von A verstanden sein.

Eine Gruppe $E \subseteq A$ heißt einrangig, wenn für zwei Untergruppen E_1 und E_2 aus E stets entweder $E_1 \subseteq E_2$ oder $E_2 \subseteq E_1$ gilt. Eine einrangige Gruppe ist stets primär. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_p^+$ bzw. $\mathfrak{R}_p^+$ wieder die Additionsgruppe der p-adischen bzw. der ganzen-p-adischen Zahlen, so sind genau die Gruppen einrangig, die zu $\mathfrak{K}_p^+$, $\mathfrak{R}_p^+$ oder der Restklassengruppe $\mathfrak{K}_p^+/\mathfrak{R}_p^+$ oder schließlich zu einer gewöhnlichen endlichen zyklischen primären Gruppe isomorph sind[24]). — Eine Gruppe heißt vom Rang $\varkappa$ ($\varkappa$ beliebige Kardinalzahl), wenn sie sich als abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen Vereinigungsgruppe von $\varkappa$, aber nicht weniger, einrangigen Gruppen darstellen läßt. — Eine endlichrangige primäre Gruppe ist, wie wohlbekannt, im wesentlichen einfach eine gewöhnliche p-adische Operatorgruppe und ihre (zu $\mathfrak{R}_p$ gehörige) Topologienklasse besteht aus einer einzigen Topologie, die also mit der S-Topologie identisch ist. — Gruppen, die nur Elemente von endlicher (bzw. unendlicher) Ordnung enthalten, bezeichnen wir wie üblich als Torsionsgruppen (bzw. als torsionsfrei). — Eine Untergruppe $B \subseteq A$ heißt eine „große Untergruppe"[25]), wenn A/B eine endlichrangige Torsionsgruppe ist. Die Vereinigungsgruppe beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen ist eine große

[24]) Prüfer, H.: Theorie der Abelschen Gruppen. II. Math. Z. **22**, 222—249 (1925).

[25]) Siehe Prüfer, H.: Theorie der Abelschen Gruppen. I. Math. Z. **20**, 165—187 (1924).

Untergruppe. Ist $B = \bigcap A_\beta$ eine große Untergruppe (A_β Untergruppen), so gibt es bereits endlich viele A_β, deren Durchschnitt gleich B ist. Ist C irgendeine Untergruppe von A, $a \notin C$ ($a \in A$), so gibt es eine große Untergruppe $B < A$ mit $C \leqq B$ und $a \notin B$[26]).

9. Sei nun A eine (nicht notwendig primäre) torsionstopologische Gruppe (s. Satz 2). Wir fragen nach den gröbsten Topologien von A und bemerken zunächst:

Satz 12. Ist τ^* eine (absolut) gröbste Topologie[27]) von A, $\mathfrak{F}^*$ der zugehörige charakteristische Filter, so besteht $\mathfrak{F}^*$ aus großen Untergruppen von A.

Beweis. Sei $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A mit $a \notin A_\alpha$. Dann gibt es eine große Untergruppe $B_a \geqq A_\alpha$ mit $a \notin B_a$. Wegen $B_a \geqq A_\alpha$ ist B_a eine charakteristische Untergruppe von A. Lassen wir nun a alle Elemente $\neq 0$ von A durchlaufen, so gilt für die zugehörigen B_a: $\bigcap B_a = 0$ und die B_a erzeugen offenbar einen aus großen Untergruppen bestehenden Teilfilter von $\mathfrak{F}^*$, der eine gröbere Topologie von A definieren würde, wenn er von $\mathfrak{F}^*$ verschieden wäre.

Definition. Die Topologie τ^* von A heiße eine *„totalgröbste"*, wenn für jede Restklassengruppe $\bar{A}$ von A nach einer abgeschlossenen Untergruppe die durch τ^* in $\bar{A}$ induzierte Topologie $\overline{\tau^*}$ eine (absolut) gröbste Topologie von $\bar{A}$ ist. —

Wie früher bemerkt, sind die abgeschlossenen Untergruppen B von A genau diejenigen, die sich als Durchschnitt von charakteristischen Untergruppen A_α darstellen lassen. Die Gesamtheit der B umfassenden charakteristischen Untergruppen von A bildet einen Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{F}$ von A und man sieht leicht:

Die Topologie τ^* von A mit dem charakteristischen Filter $\mathfrak{F}^*$ ist genau dann eine totalgröbste, wenn verschiedene Teilfilter von $\mathfrak{F}^*$ stets verschiedene Durchschnitte haben.

Denn ist $B = \bigcap A_\alpha$ eine abgeschlossene Untergruppe von A, wo die A_{α_B} alle B umfassenden charakteristischen Untergruppen von A durchlaufen und also einen Filter $\mathfrak{F}_B$ bilden und ist $\bar{A} = A/B$, so besteht der charakteristische Filter $\overline{\mathfrak{F}}_B$ von $\bar{A}$ aus den Bildern $\bar{A}_{\alpha_B}$ der A_{α_B}. Gäbe es einen echten Teilfilter $\overline{\mathfrak{F}}'_B$ von $\overline{\mathfrak{F}}_B$, dessen Durchschnitt $\bar{0}$ ist, der also eine gröbere Topologie von $\bar{A}$ definiert als $\overline{\mathfrak{F}}_B$ und ist $\mathfrak{F}'_B$ der aus den vollständigen Urbildern der Gruppen aus $\overline{\mathfrak{F}}'_B$ bestehende Filter in A, so wäre $\mathfrak{F}'_B < \mathfrak{F}_B$ und hätte den gleichen Durchschnitt B. Entsprechend umgekehrt.

Definition. Die Gruppe A heißt *„totalvollständig"*, wenn jede Restklassengruppe $\bar{A}$ von A nach einer abgeschlossenen Untergruppe hinsichtlich der durch die Topologie von A in $\bar{A}$ induzierten Topologie vollständig ist.

[26]) Siehe PIETRKOWSKI, ST.: [19]), Satz 5.

[27]) Wir unterscheiden „absolut gröbste" Topologie und „gröbste Topologie einer Topologienklasse T". Wie später bemerkt wird, fallen im primären Falle beide Begriffe zusammen.

Die Eigenschaft der Totalvollständigkeit von A ist gleichwertig zu der folgenden:

Ist B irgendeine abgeschlossene Untergruppe von A, $\mathfrak{Z}_B$ der Filter aller charakteristischen Untergruppen $A_{\alpha_B} \supseteq B$ von A, so besitzt jeder aus Nebenscharen der A_{α_B} bestehende Filter $\mathfrak{U}_B$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Denn der Bildfilter $\overline{\mathfrak{Z}}_B$ von $\mathfrak{Z}_B$ in $\bar{A} = A/B$ ist genau der charakteristische Filter von $\bar{A}$. Ist A totalvollständig, also $\bar{A}$ vollständig, so besitzt jeder aus Restklassen von $\overline{\mathfrak{Z}}_B$ bestehende CAUCHY-Filter $\overline{\mathfrak{U}}_B$ in $\bar{A}$ einen nicht leeren Durchschnitt und also auch der vollständige Urbildfilter $\mathfrak{U}_B$ von $\overline{\mathfrak{U}}_B$ in A. Entsprechend umgekehrt. Hieraus folgt *nicht*, daß in einer totalvollständigen Gruppe A jeder aus Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen bestehende Filter einen nicht leeren Durchschnitt hat, denn ist z.B. $\mathfrak{Z}'$ ein Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{Z}$ von A mit dem Durchschnitt (0), so lassen sich die obigen Schlüsse auf einen aus Nebenscharen nach den zu $\mathfrak{Z}'$ gehörenden Gruppen bestehenden Filter nicht anwenden. Indessen gilt:

Ist die Topologie der totalvollständigen Gruppe A eine totalgröbste, so besitzt jeder aus Nebenscharen irgendwelcher charakteristischen Untergruppen $A_{\alpha'}$ bestehende Filter $\mathfrak{U}'$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Dies folgt unmittelbar daraus, daß die $A_{\alpha'}$ hier den *vollständigen* $B' = \bigcap A_{\alpha'}$ umfassenden Filter bilden.

Schließlich bemerken wir noch:

Ist $\mathfrak{U}$ irgendein aus Mengen U_α bestehender Filter, so sagen wir, *der Filter $\mathfrak{U}'$ entstehe aus $\mathfrak{U}$ durch Verfeinerung*, wenn $\mathfrak{U}'$ erzeugt wird von den Mengen $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ und gewissen (nicht leeren und nicht endlichen) Durchschnitten $\bigcap U_{\alpha_\varrho}$ $(U_{\alpha_\varrho} \in \mathfrak{U})$. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ haben dann ersichtlich den gleichen Durchschnitt. Ist nun ein System von abgeschlossenen Untergruppen B_β der Gruppe A und ein aus Nebenscharen U'_β der B_β bestehender Filter $\mathfrak{U}'$ gegeben, so gibt es einen aus Nebenscharen gewisser charakteristischer Untergruppen A_{α_ϱ} bestehenden Filter $\mathfrak{U}$, so daß $\mathfrak{U}'$ aus $\mathfrak{U}$ durch Verfeinerung hervorgeht. Denn man braucht für $\mathfrak{U}$ nur die Menge aller mindestens ein U'_β umfassenden Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen zu wählen.

Satz 13. *A sei eine Gruppe mit der Topologie τ^*. A ist dann und nur dann totalvollständig und die Topologie τ^* eine totalgröbste, wenn A linear kompakt ist.*

Beweis. Das „nur dann" folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Bemerkungen. Sei nun A linear kompakt mit der Topologie τ^*, A^*_α eine charakteristische Untergruppe von A. Die Restklassengruppe $\bar{A} = A/A^*_\alpha$ ist dann diskret und linear kompakt. Ist $\bar{a} \in \bar{A}$, so ist die von $\bar{a}$ erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle \bar{a} \rangle$ abgeschlossen in $\bar{A}$ und also auch linear kompakt. Wäre aber $\langle \bar{a} \rangle$ von unendlicher Ordnung, so hätte sicherlich nicht jeder aus Restklassen nach den Untergruppen von endlichem Index in $\langle \bar{a} \rangle$ bestehende Filter einen nicht leeren Durchschnitt — Widerspruch. Mithin ist $\bar{A}$ eine Torsionsgruppe. Angenommen, $\bar{A}$ wäre von unendlichem Range. Dann gäbe es eine

Untergruppe $\bar{A}_1 \subseteq \bar{A}$, die direkte Summe von unendlich vielen zyklischen Gruppen $(\bar{a}_\alpha)$ wäre: $\bar{A}_1 = \sum \oplus (\bar{a}_\alpha)$. Jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}_1$ ist dann als endliche Summe $\sum n_\alpha \bar{a}_\alpha$ darstellbar, wo die n_α modulo der Ordnung von $\bar{a}_\alpha$ eindeutig bestimmt sind. Für irgendein festes α_0 wähle man $n_{\alpha_0} \not\equiv 0$ (mod der Ordnung von $\bar{a}_{\alpha_0}$) und bilde die Menge U_{α_0} aller Elemente der Form $n_{\alpha_0} \cdot \bar{a}_{\alpha_0} + \sum_{\alpha' \neq \alpha_0} n_{\alpha'} \cdot \bar{a}_{\alpha'}$. U_{α_0} ist eine Restklasse aus $\bar{A}_1$. Bildet man so das System aller U_{α_0}, indem man α_0 alle α durchlaufen läßt, so haben je endlich viele U_{α_0} einen nicht leeren Durchschnitt und die U_{α_0} erzeugen einen Filter $\mathfrak{U}$ in $\bar{A}_1$. Aber kein $\bar{a} = \sum n_\alpha \bar{a}_\alpha \in \bar{A}_1$ (endliche Summe!) kann in allen U_{α_0} liegen und der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ ist leer. $\bar{A}_1$ und damit $\bar{A}$ wäre also nicht linear kompakt — Widerspruch. $\bar{A}$ ist also eine endlichrangige Torsionsgruppe und der charakteristische Filter von A besteht aus großen Untergruppen. — Sei nun $\tau < \tau^*$ eine gröbere Topologie von A als τ^*, $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}^*$ die charakteristischen Filter von A bezüglich τ bzw. τ^*, $A_\alpha^* \in \mathfrak{S}^*$. Der charakteristische Filter $\mathfrak{S}_\alpha$ der von τ in A_α^* induzierten Relativtopologie besteht aus den Gruppen $A_\beta \cap A_\alpha^*$ $(A_\beta \in \mathfrak{S})$. Sei $\mathfrak{U}_\alpha$ ein aus Nebenscharen der $A_\beta \cap A_\alpha^*$ bestehender CAUCHY-Filter in A_α^* bezüglich der durch τ induzierten Topologie. Die in $\mathfrak{U}_\alpha$ liegenden Scharen sind aber hinsichtlich der Topologie τ^* abgeschlossen und wegen der linearen Kompaktheit besitzt $\mathfrak{U}_\alpha$ einen nicht leeren Durchschnitt. Daher ist A_α^* auch bezüglich τ abgeschlossen und also Durchschnitt von charakteristischen τ-Untergruppen A_β. Da aber A_α^* eine große Untergruppe ist, ist A_α^* bereits Durchschnitt endlich vieler A_β, d.h. A_α^* ist eine charakteristische τ-Untergruppe. Hieraus folgt $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{S}$, also $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$, $\tau^* = \tau$ und τ^* ist eine gröbste Topologie. Da mit A auch jede Restklassengruppe linear kompakt ist, ist τ^* sogar eine totalgröbste Topologie. Daß die linear kompakte Gruppe A totalvollständig ist, ist unmittelbar klar. Damit ist alles bewiesen.

10. Wir wenden uns nun wieder den zyklovollständigen primären Gruppen, d.h. also den Gruppen mit dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich zu und bemerken zunächst:

Ist T die durch den natürlichen Operatorenbereich von A festgelegte Topologienklasse, $\tau_1 \in T$, so gehört auch jede gröbere Topologie τ_2 von A zu T. Ist τ^* also eine gröbste Topologie von T, so ist τ^* sogar eine absolut gröbste Topologie.

Ist nämlich $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ der charakteristische Filter von A bezüglich der Topologie τ_1 bzw. τ_2, $\tau_1 \in T$ und ist τ_2 gröber als τ_1, also $\mathfrak{S}_2$ ein Teilfilter von $\mathfrak{S}_1$ mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt der zu $\mathfrak{S}_2$ gehörigen Gruppen die Nullgruppe ist, dann induziert τ_2 in jeder abgeschlossenen zyklischen Gruppe (a) die gleiche Topologie wie τ_1, also $\tau_2 \sim \tau_1$ und $\tau_2 \in T$.

Satz 14. *A habe den ganz-p-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}_p$ als natürlichen Operatorenbereich und einen aus großen Untergruppen bestehenden charakteristischen Filter. Dann gibt es eine zu A topologisch isomorphe Untergruppe A' der Gruppe $W = \sum^T \oplus Z_\alpha$, wo die (in geeigneter Anzahl zu wählenden) Gruppen Z_α zur (diskreten) Restklassengruppe $\mathfrak{R}_p^+ / \mathfrak{R}_p^+$ isomorph sind.*

Beweis. Sei $Z = \mathfrak{N}_p^+/\mathfrak{N}_p^+$. $\{f_\alpha\}$ sei die Menge aller topologischen (Operator-) Homomorphismen von A in Z. Zu jedem α bilden wir die zu Z isomorphe Gruppe Z_α und daraus die direkte TYCHONOFF-Summe $W = \sum^T \oplus Z_\alpha$. Ordnen wir jedem $a \in A$ das Element $a' = \sum_\alpha f_\alpha(a) \in W$ zu, so ist die erhaltene Abbildung φ zunächst ein gewöhnlicher (Operator-) Homomorphismus von A in W. Denn aus $a_1' = \sum f_\alpha(a_1) = \varphi(a_1)$, $a_2' = \sum f_\alpha(a_2) = \varphi(a_2)$ folgt

$$\varphi(a_1 + a_2) = \sum f_\alpha(a_1 + a_2) = \sum f_\alpha(a_1) + \sum f_\alpha(a_2)$$
$$= \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

und entsprechend bei der Operatormultiplikation. — φ ist sogar ein gewöhnlicher Isomorphismus von A auf die Bildgruppe $A' \subseteq W$. Denn zu jedem f_α gehört als Kern eine charakteristische Untergruppe P_α mit einrangiger Restklassengruppe A/P_α und umgekehrt bestimmt jede derartige charakteristische Untergruppe P_α mindestens einen Homomorphismus von A in Z mit P_α als Kern. Da sich aber offenbar jede charakteristische Untergruppe von A als Durchschnitt von endlich vielen P_α darstellen läßt, folgt $\bigcap P_\alpha = 0$. Ist also $\varphi(a) = 0$, also $f_\alpha(a) = 0$ für jedes α, so folgt $a \in \bigcap P_\alpha = 0$ und hieraus die Isomorphie. — φ ist umkehrbar stetig. Denn sei W_α die Menge aller Elemente $\sum_{\beta \neq \alpha} a_\beta$ mit $a_\beta \in Z_\beta$ von W. Die W_α bilden dann ein Erzeugendensystem des charakteristischen Filters von W und die $A_\alpha' = A' \cap W_\alpha$ erzeugen den charakteristischen Filter von $A' \subseteq W$. Das Urbild von W_α bzw. A_α' in A vermöge φ ist aber dann gerade P_α, also offen in A und umgekehrt sind die Bilder A_α' der P_α offen in A'. Da die P_α bzw. A_α' ein Erzeugendensystem des charakteristischen Filters von A bzw. A' bilden, folgt die Behauptung.

Eine vollständige Gruppe, deren charakteristischer Filter aus großen Untergruppen besteht wollen wir eine „*K-topologische Gruppe*" nennen[28]).

Dann folgt aus Satz 14 und 13:

Satz 15. *A* sei eine primäre Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A ist K-topologisch.

(b) A ist linear kompakt.

(c) A ist totalvollständig und ihre Topologie eine totalgröbste[29]).

Beweis. Aus (a) folgt (b): Da die Eigenschaft der Vollständigkeit bei topologischer Isomorphie erhalten bleibt, ist A auf Grund der Voraussetzung (a) nach Satz 14 einer abgeschlossenen Untergruppe der linear kompakten Gruppe W topologisch isomorph und da auch lineare Kompaktheit gegenüber topologischer Isomorphie invariant ist, folgt (b). (c) folgt aus (b) nach Satz 13 und (a) ist nach Satz 12 eine Folge von (c).

[28]) Die abzählbar-rangigen K-topologischen Gruppen sind identisch mit den von KRULL[1a]) eingehend untersuchten „abgeschlossenen separabeln Gruppen".

[29]) Vgl. KRULL[1a]) Satz 2. Unser Satz 15 beantwortet die dort (Anm. 21) aufgeworfene Frage.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 15. August 1953.)

Carlitz, L.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 474—483 (1954)

Congruence properties of the polynomials of Hermite, Laguerre and Legendre.

By
Leonard Carlitz.

1. *Introduction.* Congruence properties of the classical orthogonal polynomials have not received much attention. The congruence of Schur:

$$P_m \equiv P_{a_0} P_{a_1}^{p} \dots P_{a_r}^{p^r} \pmod{p}, \tag{1.1}$$

where p is an odd prime,

$$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r \qquad (0 \leqq a_i < p),$$

and $P_m = P_m(x)$ denotes the Legendre polynomial of degree m, may be cited. For a proof of (1.1) see [5, Theorem 6.1].

In the present paper we show first that for the Hermite polynomial $H_n(x)$ we have

$$H_{n+m}(x) = (2x)^m H_n(x) \pmod{m}, \tag{1.2}$$

where m is an arbitrary integer. Moreover if we put

$$\Delta^r H_n(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} H_{n+sm}(x) H_{(r-s)m}, \tag{1.3}$$

then we have

$$\Delta^{2r} H_n(x) \equiv \Delta^{2r-1} H_n(x) \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{1.4}$$

for all $r \geqq 1$. In the next place if $L_n^{(\alpha)}(x)$ denotes the Laguerre polynomial of degree n, we put $\Lambda_n^{(\alpha)}(x) = n!\, L_n^{(\alpha)}(x)$ and show that

$$\Lambda_{n+m}^{(\alpha)}(x) \equiv \Lambda_m^{(\alpha)}(x) \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m}, \tag{1.5}$$

where the parameter α is an indeterminate or a rational number that is integral (mod m). Indeed in the latter case we have the more explicit result

$$\Lambda_{n+m}^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^m \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m}. \tag{1.6}$$

Corresponding to (1.3) we put

$$\Delta^r \Lambda_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \Lambda_{n+sm}^{(\alpha)}(x) \Lambda_{(r-s)m}^{(\alpha)}(x) \tag{1.7}$$

and show that

$$\Delta^{2r} \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv \Delta^{2r-1} \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{1.8}$$

for all $r \geqq 1$.

These results for the Hermite and Laguerre polynomials are proved in a uniform manner by means of a theorem on difference equations of the second order (see § 2 below).

The situation for Legendre polynomials seems somewhat less favorable. We show that

$$n!\, P_{n+m}(x) \equiv n!\, P_n(x)\, P_m(x) \pmod{m}, \tag{1.9}$$

$$n!\, P_{m-n-1}(x) \equiv n!\, P_n(x)\, P_{m-1}(x) \pmod{m} \quad (m > n), \tag{1.10}$$

where m is an arbitrary odd integer. However no result of the form (1.4) or (1.8) is obtained. Indeed it is easy to show for example that

$$P_{2p}(x) - P_p^2(x) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

where p is an arbitrary odd prime.

For congruences like (1.9) and (1.10) for the ultraspherical polynomials see § 6.

It may be of interest to remark that the formulas (1.4) and (1.8) are similar to congruences satisfied by g_n, the number of n-gons formed by n lines [1]; the number g_n also satisfies [3]

$$g_{n+1} = n\, g_n + \tfrac{1}{2} n(n-1)\, g_{n-2} \qquad (g_1 = g_2 = 0,\ g_3 = 1).$$

Throughout the paper the symbol x is an indeterminate or a rational number that is integral (mod m).

2. *Difference equations of the second order.* Consider the recurrence

$$u_{n+1} = f(n)\, u_n + g(n)\, u_{n-1}, \tag{2.1}$$

where $f(n)$ and $g(n)$ are polynomials in n with integral coefficients; moreover we assume that

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = f(0), \qquad g(0) = 0. \tag{2.2}$$

Clearly u_n is uniquely determined by (2.1) and (2.2).

Now for $m \geq 1$, we have first

$$u_{m+1} \equiv f(m)\, u_m + g(m)\, u_{m-1} \equiv f(0)\, u_m \equiv u_1\, u_m \pmod{m}.$$

Next it is clear that

$$\begin{aligned} u_{m+2} &= f(m+1)\, u_{m+1} + g(m+1)\, u_m \equiv f(1)\, u_{m+1} + g(1)\, u_m \\ &\equiv \big(f(1)\, u_1 + g(1)\big)\, u_m \equiv u_2\, u_m \pmod{m}. \end{aligned}$$

We now prove that generally

$$u_{n+m} \equiv u_n\, u_m \pmod{m} \tag{2.3}$$

for $n \geqq 0$. Since (2.3) is true for $n = 0, 1, 2$ we assume that it holds for the value n. Then using (2.1) we get

$$\begin{aligned} u_{n+m+1} &= f(n+m)\, u_{n+m} + g(n+m)\, u_{n+m-1} \\ &\equiv f(n)\, u_{n+m} + g(n)\, u_{n+m-1} \\ &\equiv \big(f(n)\, u_n + g(n)\, u_{n-1}\big)\, u_m \\ &\equiv u_{n+1}\, u_m \pmod{m}, \end{aligned}$$

thus completing the induction.

If we next define

$$\Delta^r u_n = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} u_{n+sm}\, u_{(r-s)m}, \tag{2.4}$$

where m is fixed, then (2.1) and (2.4) yield

$$\begin{aligned} \Delta^r u_{n+1} &= \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} u_{(r-s)m} \{f(n+sm)\, u_{n+sm} + g(n+sm)\, u_{n+sm-1}\} \\ &= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \Delta^s u_{n+(r-s)m}\, \delta^{r-s} f(n) + \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \Delta^s u_{n+(r-s)m-1}\, \delta^{r-s} g(n), \end{aligned} \tag{2.5}$$

where $\delta^r f(n)$ and $\delta^r g(n)$ are defined by

$$\delta^r h(n) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} h(n+sm). \tag{2.6}$$

We now prove that

$$\Delta^{2r} u_n \equiv 0 \equiv \Delta^{2r-1} u_n \pmod{m^r} \tag{2.7}$$

for all $r \geqq 1$. For $r = 1$, the second half of (2.7) is identical with (2.3). As for the first half of (2.7), we have

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_n &= u_{n+2m} - 2u_{n+m}\, u_m + u_n\, u_{2m} \\ &\equiv 2u_n (u_{2m} - u_m^2) \equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Thus it is clear that (2.7) holds for $r = 1$. We now assume that (2.7) holds up to and including the value $r-1$. Then since it follows from (2.6) that

$$\delta^r f(n) \equiv \delta^r g(n) \equiv 0 \pmod{m^r}, \tag{2.8}$$

it is seen that (2.5) implies

$$\Delta^{2r-1} u_{n+1} \equiv f(n)\, \Delta^{2r-1} u_n + g(n)\, \Delta^{2r-1} u_{n-1} \pmod{m^r}. \tag{2.9}$$

It therefore suffices to examine $\Delta^{2r-1} u_0$ and $\Delta^{2r-1} u_1$. But by (2.4)

$$\Delta^{2r-1} u_0 = \sum_{s=0}^{2r-1} (-1)^{s-1} \binom{2r-1}{s} u_{sm}\, u_{(2r-1-s)m} = 0$$

and in particular

$$\Delta^{2r-1} u_0 \equiv 0 \pmod{m^r}. \tag{2.10}$$

Secondly as in the proof of (2.5),

$$\Delta^{2r-1} u_1 = \sum_{s=0}^{2r-1} \binom{2r-1}{s} \Delta^s u_{(2r-1-s)m}\, \delta^{2r-1-s} f(0) + \\ + \sum_{s=0}^{2r-2} \binom{2r-1}{s} \Delta^s u_{(2r-1-s)m-1}\, \delta^{2r-1-s} g(0),$$

and therefore

$$\Delta^{2r-1} u_1 \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.11}$$

by (2.8), (2.10) and the inductive hypothesis. Combining (2.10) and (2.11) with (2.9) we get

$$\Delta^{2r-1} u_n \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.12}$$

for all $n \geqq 0$.

The proof of

$$\Delta^{2r} u_n \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.13}$$

is similar to that of (2.12). To begin with

$$\Delta^2 u_n = u_{n+2m} - u_{n+m} u_m + u_n u_{2m} \equiv 0 \pmod{m}$$

in view of (2.3). Thus (2.13) holds for $r = 1$. Assuming the truth of (2.13) up to and including the value $r-1$, we get by means of (2.5) and (2.8)

$$\Delta^{2r} u_{n+1} \equiv f(n)\, \Delta^{2r} u_n + g(n)\, \Delta^{2r} u_{n-1} \pmod{m^r}. \tag{2.14}$$

In the next place it is easily proved using (2.4) that $\Delta^{2r} u_0 = 2\Delta^{2r-1} u_m$, so that

$$\Delta^{2r} u_0 \equiv 0 \pmod{m^r}. \tag{2.15}$$

We then prove

$$\Delta^{2r} u_1 \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.16}$$

exactly as in the proof of (2.11). Clearly (2.14), (2.15) and (2.16) imply (2.13).

We may state

Theorem 1. *Let $f(n)$, $g(n)$ denote polynomials in n with coefficients that are integral* (mod m), *where m is a fixed integer. Define u_n by means of* (2.1) *and* (2.2). *Then u_n satisfies*

$$\Delta^{2r} u_n \equiv \Delta^{2r-1} u_n \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.17}$$

for all $n \geqq 0$, $r \geqq 1$, where $\Delta^r u_n$ is defined by (2.4).

We remark that (2.17) holds if $f(n)$, $g(n)$ contain additional indeterminates.

3. *The Hermite polynomials.* The Hermite polynomial [4, p. 102]

$$H_n(x) = \sum_{2s \leqq n} (-1)^s (2x)^{n-2s} \frac{n!}{s!(n-2s)!} \tag{3.1}$$

satisfies the recurrence

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \qquad (n \geqq 1), \tag{3.2}$$

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$. Comparing (3.2) with (2.1) and (2.2) it is clear that Theorem 1 applies. However the result for $\Delta H_n(x)$ can be made more explicit. Indeed if we write (3.1) in the form

$$H_n(x) = \sum_{2s \leqq n} (-1)^s (2x)^{n-2s} \binom{n-s}{s} (n)_s, \tag{3.3}$$

where $(n)_s = n(n-1)\dots(n-s+1)$, $(n)_0 = 1$, it is evident that

$$H_m(x) \equiv (2x)^m \pmod{m}. \tag{3.4}$$

We may state

Theorem 2. *The polynomial $H_n(x)$ satisfies*

$$H_{n+m}(x) \equiv (2x)^m H_n(x) \pmod{m} \tag{3.5}$$

for all $n \geqq 0$; also for $r \geqq 1$

$$\Delta^{2r} H_n(x) \equiv 0 \equiv \Delta^{2r-1} H_n(x) \pmod{m^r}, \tag{3.6}$$

where

$$\Delta^r H_n(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} H_{n+sm}(x) H_{(r-s)m}(x).$$

The congruence (3.5) is evidently equivalent to

$$\frac{(m+n)_{2s}}{s!} \equiv \frac{(n)_{2s}}{s!} \pmod{m}. \tag{3.5}'$$

It may be of interest to remark that the following formula of FELDHEIM [2]:

$$H_m(x) H_n(x) \equiv \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \binom{n}{r} (m)_r 2^r H_{m+n-2r}(x) \tag{3.7}$$

implies

$$H_m(x) H_n(x) \equiv H_{m+n}(x) \pmod{m}. \tag{3.8}$$

In view of (3.4), (3.8) is equivalent to (3.5). We also note that for $m = p$, $n = kp$, (3.7) yields

$$H_p(x) H_{kp}(x) \equiv H_{(k+1)p}(x) - 2kp H_{(k-1)p}(x) \pmod{p^2}. \tag{3.9}$$

Somewhat more generally we may state

$$H_{hp}(x) H_{kp}(x) \equiv H_{(h+k)p}(x) - 2hkp H_{(h+k-2)p}(x) \pmod{p^2}. \tag{3.10}$$

Since (3.4) implies

$$H_{np}(x) \equiv (2x)^{np} \pmod{p},$$

it follows from (3.10) that

$$H_{hp}(x) H_{kp}(x) \equiv H_{(h+k)p}(x) - 2hkp(2x)^{(h+k-2)p} \pmod{p^2}. \tag{3.11}$$

4. *The Laguerre polynomials.* The general Laguerre polynomial [4, p. 97]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-s} \frac{(-x)^s}{s!} \tag{4.1}$$

satisfies the recurrence

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (-x+2n+\alpha+1)\,L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (n \geqq 1), \tag{4.2}$$

$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $L_1^{(\alpha)}(x) = -x+\alpha+1$. If we define

$$\Lambda_n^{(\alpha)}(x) = n!\,L_n^{(\alpha)}(x), \tag{4.3}$$

then (4.2) becomes

$$\Lambda_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (-x+2n+\alpha+1)\,\Lambda_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)\,n\,\Lambda_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{4.4}$$

We have also, using (4.1) the formulas

$$\begin{cases} \Lambda_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+\alpha}{s} (n)_s (-x)^{n-s} \\ \qquad\quad = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (n+\alpha)_s (-x)^{n-s}, \end{cases} \tag{4.5}$$

where as above $(n)_s = n(n-1)\ldots(n-s+1)$. It is clear from the latter expression that $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ is a polynomial in α and x with integral coefficients. Hence in particular, if α is integral (mod m), then $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ is a polynomial in x with coefficients that are integral (mod m). In the latter case it follows from the first half of (4.5) that

$$\Lambda_m^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^m \pmod{m}. \tag{4.6}$$

If we define $\Delta^r \Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ by means of (1.7), we may apply Theorem 1 to get

Theorem 3. *The polynomial $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ satisfies*

$$\Delta^{2r}\Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv 0 \equiv \Delta^{2r-1}\Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m} \tag{4.7}$$

for all $n \geqq 0$ and $r \geqq 1$, where the parameter α may either be an indeterminate or a rational number that is integral (mod m). *In particular when α is integral* (mod m) *then*

$$\Lambda_{n+m}^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^m \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m}. \tag{4.8}$$

The congruence (4.8) is equivalent to

$$\binom{m+n+\alpha}{s} (m+n)_s \equiv \binom{n+\alpha}{s} (n)_s \pmod{m}, \tag{4.8}'$$

which may be compared with (3.5)'.

A few special results may be mentioned. If $m \mid n+\alpha$ then it follows from (4.5) that

$$\Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^n \pmod{m}. \tag{4.9}$$

If $m = k\,p$, $\alpha = h\,p$, where p is a prime, then

$$A_{kp}^{(hp)}(x) \equiv (-x)^{kp} - k(h+k)\,p\,(-x)^{(k-1)p} \pmod{p^2}. \tag{4.10}$$

In particular the polynomial $A_n(x) = A_n^{(0)}(x)$ satisfies

$$A_{kp}(x) \equiv (-x)^{kp} - k^2 p\,(-x)^{(k-1)p} \pmod{p^2}, \tag{4.11}$$

which implies

$$A_{hp}(x)A_{kp}(x) \equiv A_{(h+k)p}(x) + 2hkp\,(-x)^{(h+k-1)p} \pmod{p^2}, \tag{4.12}$$

analogous to (3.11). Indeed (4.10) implies

$$A_{hp}^{(ip)}(x)A_{kp}^{(ip)}(x) \equiv A_{(h+k)p}^{(ip)}(x) + 2hkp\,(-x)^{(h+k-1)p} \pmod{p^2}. \tag{4.13}$$

5. *The Legendre polynomials.* The Legendre polynomial $P_n(x)$ satisfies the recurrence [4, p. 82]

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x) \quad (n \geq 1), \tag{5.1}$$

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$; also it is familiar [see (5.4)] that the coefficients of $2^n P_n(x)$ are integral. Comparing (5.1) with (2.1) it is clear that Theorem 1 is not immediately applicable. However the same method of proof may be applied. Thus (5.1) implies

$$P_{m+1}(x) \equiv x\,P_m(x), \quad 2\,P_{m+2}(x) \equiv 2\,P_2(x)\,P_m(x) \pmod{m}$$

and it is easy to prove that

$$n!\,P_{n+m}(x) \equiv n!\,P_n(x)\,P_m(x) \pmod{m} \quad (n \geq 0), \tag{5.2}$$

where m is odd. Indeed, assuming that (5.2) holds for the value n, we have

$$\begin{aligned}(n+1)!\,P_{n+m+1}(x) &\equiv n!(n+m+1)\,P_{n+m+1}(x)\\ &\equiv n!\{(2n+1)\,P_{n+m}(x) - n\,P_{n+m-1}\}\\ &\equiv n!\{(2n+1)\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)\}\,P_m(x)\\ &\equiv (n+1)!\,P_{n+1}(x)\,P_m(x) \pmod{m}.\end{aligned}$$

On the other hand (5.1) also implies

$$P_{m-2}(x) \equiv x\,P_{m-1}(x), \quad 2P_{m-3}(x) \equiv 2\,P_2(x)\,P_{m-1}(x) \pmod{m}.$$

We shall now prove that

$$n!\,P_{m-n-1}(x) \equiv n!\,P_n(x)\,P_{m-1}(x) \pmod{m} \quad (m > n). \tag{5.3}$$

Since (5.3) is true for $n = 1$ and 2, we assume it holds for the value n; then

$$\begin{aligned}(n+1)!\,P_{m-n-2}(x) &\equiv -n!\,(m-n-1)\,P_{m-n-2}(x)\\ &\equiv n!\{(m-n)\,P_{m-n}(x) - (2m-2n-1)\,x\,P_{m-n-1}(x)\}\\ &\equiv -n!\{n\,P_{n-1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x)\}\,P_{m-1}(x)\\ &\equiv (n+1)!\,P_{n+1}(x)\,P_{m-1}(x) \pmod{m}.\end{aligned}$$

This completes the proof of (5.3).

We may state

Theorem 4. *The Legendre polynomial $P_n(x)$ satisfies* (5.2) *and* (5.3) *where m is odd.*

For $m=p$, (5.2) implies (p prime)

$$P_{n+p}(x) \equiv P_p(x)\,P_n(x) \equiv x^p P_n(x) \pmod{p},$$

which is in agreement with (1.1). Note that Theorem 4 does not include an analog of (3.6) and (4.7).

We now consider in more detail the special case $m=p$, an odd prime. The formulas [3, p. 67]

$$P_n(x) = 2^{-n}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}^2 (x-1)^s (x+1)^{n-s} \tag{5.4}$$

and [3, p. 80]

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1; 1; \tfrac{1}{2}(1-x)\right), \tag{5.5}$$

where F denotes the hypergeometric function, will be required. In the first place it is evident from (5.4) that

$$P_p(x) \equiv 2^{-p}\{(x-1)^p + (x+1)^p\} \pmod{p^2}. \tag{5.6}$$

Also (5.5) implies

$$P_{p-1}(x) \equiv 1 + p\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(-1)^s}{s}\left(\frac{x-1}{2}\right)^s \pmod{p^2}; \tag{5.7}$$

but since

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^p \equiv 1 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^p + p\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\left(\frac{x-1}{2}\right)^s \pmod{p^2},$$

(5.7) reduces to

$$P_{p-1}(x) \equiv 2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^p - \left(\frac{x+1}{2}\right)^p \pmod{p^2}. \tag{5.8}$$

The weaker results [5, Lemma 6.2]

$$P_{p-1}(x) \equiv 1, \quad P_{p-1-n}(x) \equiv P_n(x) \pmod{p} \quad (0 \leq n \leq p-1) \tag{5.9}$$

are implicit in (5.3). We may also write (5.8) in the form

$$P_{p-1}(x) \equiv 2 - 2^{1-p} + p\sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\frac{1}{2s}x^{2s} \pmod{p^2}. \tag{5.10}$$

It is easy to show that (5.4) implies

$$P_{2p}(x) \equiv 2^{-2p}\left\{(x-1)^{2p} + \binom{2p}{p}^2 (x^2-1)^p + (x+1)^{2p}\right\} \pmod{p^2};$$

but since

$$\binom{2p}{p} = 2\binom{2p-1}{p-1} \equiv 2 \pmod{p^2},$$

it follows that

$$P_{2p}(x) \equiv 2^{-2p}\{(x-1)^{2p} + 4(x^2-1)^p + (x+1)^{2p}\} \pmod{p^2}. \tag{5.11}$$

Comparing (5.11) with (5.6) we get

$$P_{2p}(x) - P_p^2(x) \equiv 2^{1-2p}(x^2-1)^p \pmod{p^2}. \tag{5.12}$$

In particular then

$$P_{2p} - P_p^2(x) \not\equiv 0 \pmod{p}. \tag{5.13}$$

In the next place we have from (5.4)

$$\begin{cases} P_{p+1}(x) \equiv 2^{-p-1}\{(x-1)^{p+1} + (2p+1)(x-1)^p(x+1) + \\ \qquad + (2p+1)(x-1)(x+1)^p + (x+1)^{p+1}\} \pmod{p^2} \end{cases} \tag{5.14}$$

and

$$\begin{cases} P_{2p+1}(x) \equiv 2^{-2p-1}\{(x-1)^{2p+1} + (x+1)^{2p+1} + \\ \qquad + (4p+1)\left((x-1)^{2p}(x+1) + (x-1)(x+1)^{2p}\right) + \\ \qquad + 4(2p+1)(x^2-1)^p(2x)\} \pmod{p^2}. \end{cases} \tag{5.15}$$

It follows that (5.6), (5.14) and (5.15) that

$$\begin{cases} P_{2p+1}(x) - P_p(x)P_{p+1}(x) \equiv 2^{-2p}\{p\left((x-1)^{2p}(x+1) + \right. \\ \qquad \left. + (x-1)(x+1)^{2p}\right) + 3(2p+1)x(x^2-1)^p\} \pmod{p^2}, \end{cases} \tag{5.16}$$

and in particular

$$P_{2p+1}(x) - P_p(x)P_{p+1} \equiv \tfrac{3}{4}x(x^2-1)^p \pmod{p}. \tag{5.17}$$

In view of (5.13) and (5.17) it does not seem possible to improve (5.2) even in the case $m=p$, $n \geqq p$.

6. *Ultraspherical polynomials.* The ultraspherical polynomial $P_n^{(\lambda)}(x)$ may be defined by means of [4, p. 80]

$$(1-2xw+w^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x)\, w^n. \tag{6.1}$$

It is clear from (6.1) that if λ is integral (mod m) then the coefficients of $P_n^{(\lambda)}(x)$ are integral (mod m). Also we have the recurrence

$$(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)xP_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x) \quad (n \geqq 1), \tag{6.2}$$

$P_0^{(\lambda)}(x)=1$, $P_1^{(\lambda)}(x)=2\lambda x$. Put $\alpha=\lambda-\frac{1}{2}$ and assume that

$$\alpha \equiv 0 \pmod{m}, \tag{6.3}$$

where m is odd. Then (6.2) reduces to

$$(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) \equiv (2n+1)xP_n^{(\lambda)} - nP_{n-1}^{(\lambda)}(x) \pmod{m}. \tag{6.4}$$

Comparing (6.4) with (5.1) it is clear that the proof of Theorem 4 applies. We conclude that, if (6.3) holds, then

$$n!\,P_{n+m}^{(\lambda)}(x) \equiv n!\,P_n^{(\lambda)}(x)\,P_m^{(\lambda)}(x) \qquad (\mathrm{mod}\ m) \tag{6.5}$$

and

$$n!\,P_{m-n-1}^{(\lambda)}(x) \equiv n!\,P_n^{(\lambda)}(x)\,P_{m-1}^{(\lambda)}(x) \qquad (\mathrm{mod}\ m) \qquad (m > n). \tag{6.6}$$

Finally we note that the formula

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,2^{-n}\sum_{s=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-s}\binom{n+\alpha}{s}(x-1)^s\,(x+1)^{n-s}$$

implies

$$P_{np}^{(\alpha p+\frac{1}{2})}(x) \equiv \{P_n^{(\alpha+\frac{1}{2})}(x)\}^p \qquad (\mathrm{mod}\ p). \tag{6.7}$$

References.

[1] Carlitz, L.: Congruences for the number of n-gons formed by n lines. Amer. Math. Monthly, to appear. — [2] Feldheim, E.: Quelques nouvelles relations pour les polynomes d Hermite. J. London Math. Soc. **13**, 22—29 (1938). — [3] Robinson, R.: A new absolute geometric constant? Amer. Math. Monthly **58**, 462—469 (1951). — [4] Szegö, G.: Orthogonal polynomials. Amer. Math. Soc., Colloquium Publ. New York **23** (1938). — [5] Wahab, J.: New cases of irreducibility for Legendre polynomials. Duke Math. J. **19**, 165—176 (1952).

Dept. of Math., Duke University, Durham N. C. (USA.).

(Eingegangen am 9. November 1953.)

Ringel, G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 484—495 (1954)

Lokal-reguläre Zerlegungen geschlossener orientierbarer Flächen.

Von
Gerhard Ringel.

Auf jeder geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ mit positiver Eulerscher Charakteristik gibt es höchstens endlich viele topologisch reguläre Polyeder. Man pflegt[1]) dies aus der Tatsache zu folgern, daß sogar nur endlich viele lokal-reguläre Polyeder auf $\mathfrak{F}$ möglich sind. Im folgenden soll versucht werden, alle lokal-regulären Zerlegungen einer geschlossenen Fläche aufzuzählen und zu konstruieren.

Es seien m, r, s natürliche Zahlen. Eine Zerlegung (Polyeder) einer geschlossenen Fläche heißt *lokal-regulär vom Typ* (m, r, s), wenn sie aus m Flächenstücken besteht, die lauter r-Ecke sind, wobei nur lauter s-kantige Eckpunkte auftreten. Einen Eckpunkt nennt man *s-kantig*, wenn er mit s Kanten inzidiert, wobei eine Kante mit zusammenfallenden Endpunkten doppelt zu zählen ist. Es wird zugelassen, daß zwei r-Ecke mehrmals aneinandergrenzen, oder auch, daß ein r-Eck zu sich selbst benachbart ist.

Die Eulersche Charakteristik $N = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$ der durch ein lokal-reguläres Polyeder vom Typ (m, r, s) definierten geschlossenen Fläche ist

$$N = -\frac{mr}{s} + \frac{mr}{2} - m = \frac{m}{2s}(rs - 2r - 2s).$$

Da für jede geschlossene Fläche $N \geqq -2$ gilt, ist für die Existenz eines lokal-regulären Polyeders vom Typ (m, r, s) notwendig, daß

(E) $\quad \frac{m}{2s}(rs - 2r - 2s)$ ganzzahlig und $\geqq -2$

ist. Überdies ist

(G) $\quad mr$ geradzahlig,

weil die Anzahl α_1 der Kanten in dem betreffenden Polyeder gleich $\frac{mr}{2}$ ist. Die Ganzzahligkeit der Eckenanzahl $\alpha_0 = \frac{mr}{s}$ folgt bereits aus (E) und (G), wie man leicht nachrechnet. Trotzdem sind die beiden Bedingungen (E) und (G) zusammen noch nicht hinreichend für die Existenz eines lokal-regulären Polyeders vom Typ (m, r, s). Als Gegenbeispiel sei ohne Beweis mitgeteilt, daß kein lokal-reguläres Polyeder vom Typ $(2, 9, 3)$ existiert. Wenn man

[1]) Heesch, H.: Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen. Nachr. Göttingen **1932**, 268—273. — Efrämovič, V. A.: Regelmäßige Vielflache. Dokl. Akad. Nauk SSSR., II. s. **57**, 223—226 (1947).

nämlich die 18 Kanten von zwei gegebenen Neunecken paarweise identifiziert, was nur auf endlich viele Arten möglich ist, so erhält man in keinem Falle lauter dreikantige Eckpunkte.

Hingegen scheinen bei Beschränkung auf orientierbare Flächen die beiden natürlichen Bedingungen (E) und (G) auch hinzureichen. Es sei hingewiesen auf die sehr allgemeine

Vermutung. *Auf der geschlossenen orientierbaren Fläche $\mathfrak{F}_p$ vom Geschlechte p existiert dann und nur dann ein lokal-reguläres Polyeder vom Typ (m, r, s), wenn die* Eulersche *Gleichung $m(rs-2r-2s)=4s(p-1)$ zutrifft und mr eine gerade Zahl ist.*

Mit Hilfe von verhältnismäßig einfachen kombinatorischen Konstruktionsmethoden gelingt es im folgenden, die obige Vermutung in den drei wichtigen Spezialfällen $p=2$, $s=3$ und $m=1$ zu beweisen. Somit ist ein Überblick gewonnen

a) über alle lokal-regulären Polyedertypen auf der orientierbaren Fläche vom Geschlechte $p=2$ (Satz 1, § 1),

b) über alle Typen orientierbarer lokal-regulärer Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten (Satz 5, § 2) und

c) über alle orientierbaren Monoedertypen (Satz 6, § 3).

Auf der Kugel ($p=0$) ist übrigens die Gültigkeit der genannten Vermutung bekannt. Sie liefert für $r\geq 3$ die 5 Platonischen Körper. — Mit Absicht werden in § 1 die Zerlegungen der speziellen Fläche $\mathfrak{F}_2$ ausführlich aufgezählt. Sie bilden nämlich die Grundlage für die Auffindung von Zerlegungen einer orientierbaren Fläche beliebigen Geschlechtes p. Die Fläche $\mathfrak{F}_p$ läßt sich ja als $(p-1)$-blättrige Überlagerungsfläche über $\mathfrak{F}_2$ repräsentieren. — An Stelle von „orientierbares lokal-reguläres Polyeder vom Typ (m, r, s)" schreiben wir kurz „o.r.P. (m, r, s)".

§ 1. Zerlegungen der Brezelfläche vom Geschlechte 2.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Existenz eines lokal-regulären Polyeders vom Typ (m, r, s) auf der Fläche $\mathfrak{F}_2$ ist die gleichzeitige Gültigkeit der beiden Bedingungen* (E) *und* (G).

(E) $$m(rs-2r-2s)=4s,$$

(G) mr ist gerade.

Ihre Notwendigkeit ist klar. Es ist nur umgekehrt zu zeigen, daß zu jedem Tripel (m, r, s), für welches (E) und (G) zutrifft, ein o.r.P. (m, r, s) existiert. Dies können nur endlich viele Tripel sein, was wir nachstehend bereits aus (E) allein folgern wollen. Weil m, r, s natürliche Zahlen sind, folgen aus (E) sofort die Ungleichungen

(U) $$r\geq 3,\ s\geq 3,\ rs-2r-2s\geq 1.$$

Wir schreiben (E) in den beiden Gestalten (E') und (E'').

$$(E') \qquad m = \frac{4}{r-2} + \frac{8 + \frac{16}{r-2}}{rs - 2r - 2s},$$

$$(E'') \qquad (s-2)(mr - 2m - 4) = 4m + 8.$$

Aus (E') und (U) folgt

$$m \leqq 4 + 8 + 16 = 28.$$

Nach (E'') ist $s-2$ ein Teiler von $4m+8$, daher

$$s \leqq 118.$$

Zu (E) gibt es also nur endlich viele Lösungstripel (m, r, s). Durch Probieren kann man leicht feststellen, daß für *beide* Bedingungen (E) und (G) genau die folgenden 25 Lösungstripel vorhanden sind.

$(1,18,3) \leftrightarrow (6,3,18)$	$(1,12,4) \leftrightarrow (3,4,12)$	$(1,8,8)$
$(2,12,3) \leftrightarrow (8,3,12)$	$(2,8,4) \leftrightarrow (4,4,8)$	$(2,6,6)$
$(3,10,3) \leftrightarrow (10,3,10)$	$(4,6,4) \leftrightarrow (6,4,6)$	$(4,5,5)$
$(4,9,3) \leftrightarrow (12,3,9)$	$(8,5,4) \leftrightarrow (10,4,5)$	
$(6,8,3) \leftrightarrow (16,3,8)$		
$(12,7,3) \leftrightarrow (28,3,7)$	$(1,10,5) \leftrightarrow (2,5,10)$	

Mit jedem o.r.P. (m, r, s) existiert gleichzeitig auch das duale o.r.P. $(mr/s, s, r)$. Solche durch duale Polyeder darstellbare Lösungstripel sind oben durch Doppelpfeil verbunden. Zum Beweis zu Satz 1 genügt es daher, nur für diejenigen 14 Tripel, die in der ersten, dritten und letzten Kolonne aufgeführt sind, ein zugehöriges o.r.P. anzugeben.

Bei der Beschreibung der folgenden Polyeder bedienen wir uns der bekannten *Kantendarstellung*, d.h. alle Kanten sind durch Buchstaben $a_1, b_3, \ldots$ bezeichnet, während jede zyklisch zu lesende Zeile den orientierten Randweg eines Polygons (Land) vorstellt. Gleichbezeichnete Kanten sind zu identifizieren, und zwar mit entgegengesetzter Orientierung, weil jeder Buchstabe einmal mit dem Exponenten $+1$ und einmal mit -1 auftritt. Damit wird auch garantiert, daß die entstehende geschlossene Fläche orientierbar ist. Man kann sich bei jedem der beschriebenen Polyeder überzeugen, daß tatsächlich jeweils s von den mr Polygonecken zu einem einzigen (s-kantigen) Eckpunkt des Polyeders (m, r, s) identifiziert werden. Beim nachfolgenden o.r.P. $(1,18,3)$ fallen z.B. die drei Eckpunkte

$$\ldots a_1^{-1} b_1 \ldots c_1^{-1} a_1 \ldots b_1^{-1} c_1 \ldots$$

des 18-Eckes zu einem einzigen Eckpunkt des Polyeders zusammen.

$(1,18,3)$ $a_1\ b_1^{-1}\ b_2\ c_2^{-1}\ c_1\ a_1^{-1}\ a_2\ b_2^{-1}\ b_3\ c_3^{-1}\ c_2\ a_2^{-1}\ a_3\ b_3^{-1}\ b_1\ c_1^{-1}\ c_3\ a_3^{-1}$

(2,12,3) $\left\{\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & b_1 & a_2 & a_3 & b_2 & a_4 & a_5 & b_1^{-1} & a_6 & a_7 & b_2^{-1} & a_8 \\ a_3^{-1} & c_1 & a_6^{-1} & a_1^{-1} & c_2 & a_4^{-1} & a_7^{-1} & c_1^{-1} & a_2^{-1} & a_5^{-1} & c_2^{-1} & a_8^{-1} \end{array}\right.$

(3,10,3) $\left\{\begin{array}{cccccccccc} a_1^{-1} & b_2 & a_3^{-1} & b_4 & a_5^{-1} & b_5 & a_4^{-1} & b_3 & a_2^{-1} & b_1 \\ b_1^{-1} & c_1 & b_2^{-1} & c_2 & b_3^{-1} & c_3 & b_4^{-1} & c_4 & b_5^{-1} & c_5 \\ c_5^{-1} & a_5 & c_3^{-1} & a_4 & c_4^{-1} & a_3 & c_1^{-1} & a_2 & c_2^{-1} & a_1 \end{array}\right.$

(4,9,3) $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 & a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1^{-1} & d_1 & e_1 & a_2^{-1} & d_2 & e_2 & a_3^{-1} & d_3 & e_3 \\ e_3^{-1} & f_3 & b_3^{-1} & e_2^{-1} & f_2 & b_2^{-1} & e_1^{-1} & f_1 & b_1^{-1} \\ c_3^{-1} & f_3^{-1} & d_3^{-1} & c_2^{-1} & f_2^{-1} & d_2^{-1} & c_1^{-1} & f_1^{-1} & d_1^{-1} \end{array}\right.$

(1,12,4) $a_1\ c_1\ a_2\ b_1\ c_2\ b_2\ a_2^{-1}\ c_2^{-1}\ a_1^{-1}\ b_2^{-1}\ c_1^{-1}\ b_1^{-1}$

(2,8,4) $\left\{\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & b_2 & b_3 & a_3 & a_4 & b_4 & b_1 \\ a_4^{-1} & a_1^{-1} & b_3^{-1} & b_4^{-1} & a_2^{-1} & a_3^{-1} & b_1^{-1} & b_2^{-1} \end{array}\right.$

(4,6,4) $\left\{\begin{array}{cccccc} b_3^{-1} & a_2^{-1} & c_2^{-1} & b_4 & c_3 & a_4 \\ c_4 & a_1 & b_3 & a_3^{-1} & c_1^{-1} & b_4^{-1} \\ b_2^{-1} & a_4^{-1} & c_4^{-1} & b_1 & c_1 & a_2 \\ c_2 & a_3 & b_2 & a_1^{-1} & c_3^{-1} & b_1^{-1} \end{array}\right.$

(1,10,5) $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_1^{-1}\ a_2^{-1}\ a_3^{-1}\ a_4^{-1}\ a_5^{-1}$

(1,8,8) $a_1\ b_1\ a_1^{-1}\ b_1^{-1}\ a_2\ b_2\ a_2^{-1}\ b_2^{-1}$

(2,6,6) $\left\{\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1^{-1} & a_2^{-1} & a_3^{-1} & a_4^{-1} & a_5^{-1} & a_6^{-1} \end{array}\right.$

(4,5,5) $\left\{\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & b_2 & a_3 & c_2 \\ a_4^{-1} & a_5^{-1} & b_2^{-1} & a_6^{-1} & c_1^{-1} \\ a_1^{-1} & a_2^{-1} & b_1^{-1} & a_3^{-1} & c_1 \\ a_4 & a_5 & b_1 & a_6 & c_2^{-1}. \end{array}\right.$

Um auch die folgenden drei Polyeder mitzuteilen, ist es vorteilhaft, nicht die Kantendarstellung sondern die *Länderdarstellung* zu wählen. Letztere hat der Verfasser in früheren Arbeiten[2]) ausführlich beschrieben und will sie hier nur kurz erläutern.

Es sei für den Augenblick die Existenz eines o.r.P. (12,7,3) vorausgesetzt. Diese 12 Siebenecke werden mit den Nummern 1, 2, ..., 12 bezeichnet. Für jedes Siebeneck wird sodann gemäß seiner Orientierung die zyklische Reihenfolge seiner 7 Nachbargebiete notiert. Es entsteht dabei etwa folgendes Schema.

[2]) Ringel, G.: Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes. J. reine angew. Math. **190**, 129—147 (1952). — Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$. Erscheint demnächst ebenda.

(12,7,3)

1.	5	6	9	8	4	2	3
2.	6	5	10	7	3	1	4
3.	1	2	7	12	6	4	5
4.	2	1	8	11	5	3	6
5.	3	4	11	10	2	6	1
6.	4	3	12	9	1	5	2
7.	11	12	3	2	10	8	9
8.	12	11	4	1	9	7	10
9.	7	8	1	6	12	10	11
10.	8	7	2	5	11	9	12
11.	9	10	5	4	8	12	7
12.	10	9	6	3	7	11	8.

Weil alle Eckpunkte dreikantig sind, gilt in diesem Schema notwendig die

Regel R*. *Wenn in der i-ten Zeile i. . . . a k b . . . steht, so steht in der k-ten Zeile k. . . . b i a . . . .*

Nun läßt sich auch umgekehrt sagen: Wenn in einem derartigen Schema Regel R* und die unten genannte Regel V* erfüllt ist, so gibt es auch ein zugehöriges orientierbares Polyeder.

Regel V*. *In jeder Zeile kommt jedes geordnete Paar von aufeinanderfolgenden Nummern höchstens einmal vor.*

Beide Regeln sind im vorstehenden Schema und in den beiden nächsten Schemata erfüllt und somit zunächst je ein orientierbares reguläres Polyeder vom Typ (12,7,3) und (6,8,3) beschrieben.

(6,8,3)

1.	5	6	2	5	3	4	2	3
2.	6	5	1	6	4	3	1	4
3.	1	2	4	1	5	6	4	5
4.	2	1	3	2	6	5	3	6
5.	3	4	6	3	1	2	6	1
6.	4	3	5	4	2	1	5	2.

Das folgende Schema stellt ein aus 8 Zehnecken, 10 Vierecken und lauter dreikantigen Eckpunkten bestehendes, orientierbares Polyeder dar.

1.	10	4	12	3	16	8	17	5	18	2
2.	10	1	18	4	14	7	15	8	16	3
3.	10	2	16	1	12	6	13	7	14	4
4.	10	3	14	2	18	5	11	6	12	1
5.	9	8	11	4	18	1	17	7	13	6
6.	9	5	13	3	12	4	11	8	15	7
7.	9	6	15	2	14	3	13	5	17	8
8.	9	7	17	1	16	2	15	6	11	5
9.	5	6	7	8						

10.	1	2	3	4
11.	4	5	8	6
12.	6	3	1	4
13.	3	6	5	7
14.	7	2	4	3
15.	2	7	6	8
16.	8	1	3	2
17.	1	8	7	5
18.	5	4	2	1

Man kann hierin gleichzeitig jedes Viereck auf einen Punkt zusammenziehen. Weil die Vierecke vorher untereinander nicht benachbart waren, entsteht dabei ein o.r.P. $(8,5,4)$. Hiermit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2. Reguläre Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten.

Satz 2. *Wenn ein o.r.P. (m, r, s) existiert, n eine natürliche Zahl und $rs-2r-2s \geqq 0$ ist, so gibt es auch ein o.r.P. $(n\,m, r, s)$.*

Beweis. Die durch das reguläre Polyeder (m, r, s) definierte orientierbare Fläche $\mathfrak{F}$ hat die Charakteristik $N = \frac{m}{2s}(rs-2r-2s) \geqq 0$. Es sei C eine auf $\mathfrak{F}$ verlaufende einfach geschlossene Kurve, welche $\mathfrak{F}$ nicht in zwei getrennte Teile zerlegt. (Bei $N > -2$ gibt es stets eine solche Kurve.) Das Polyeder (m, r, s) sei in n übereinanderliegenden Exemplaren gegeben und jedes Exemplar sei längs C durchschnitten. Die dabei entstehenden $2n$ geschlossenen Randkurven wollen wir dann in anderer Reihenfolge wieder miteinander identifizieren. Dies kann stets so geschehen (etwa nach Fig. 1), daß eine einzige geschlossene orientierbare Fläche (mit der Charakteristik nN) entsteht.

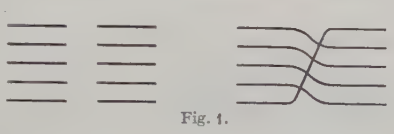

Fig. 1.

Beispiel. Wir nehmen das in § 1 genannte Polyeder $(1,8,8)$ in zwei Exemplaren, schneiden dann etwa längs der geschlossenen Kurve b_1 auf und identifizieren wieder mit vertauschten Rollen. Das Ergebnis ist tatsächlich ein o.r.P. $(2,8,8)$ auf der Fläche $\mathfrak{F}_3$:

$$a_1\ b_1'\ a_1^{-1}\ \ b_1^{-1}\ \ a_2\ b_2\ a_2^{-1}\ \ b_2^{-1}$$
$$a_1'\ b_1\ a_1'^{-1}\ b_1'^{-1}\ a_2'\ b_2'\ a_2'^{-1}\ b_2'^{-1}.$$

Satz 3. *Für die sechs Werte $r = 7, 8, 9, 10, 12, 18$ und nur für diese gilt: Es gibt auf jeder geschlossenen orientierbaren Fläche mit positiver Charakteristik ein lokal-reguläres Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten und lauter r-Ecken als Flächenstücken.*

Satz 4. *Für die sechs Werte $m = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ und nur für diese gilt: Es gibt auf jeder geschlossenen orientierbaren Fläche mit positiver Charakteristik ein aus m Polygonen bestehendes lokal-reguläres Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten.*

Die Eulersche Formel für ein reguläres Polyeder vom Typ $(m, r, 3)$ auf der orientierbaren Fläche $\mathfrak{F}_p$ vom Geschlechte p lautet

$$m(r-6) = 12(p-1).$$

Wenn diese Gleichung für ein bestimmtes r (bzw. für ein bestimmtes m) und für *jedes* Geschlecht $p > 1$ lösbar sein soll, so muß $r-6$ (bzw. m) ein Teiler von 12 sein. Die Sätze 3 und 4 gelten also höchstens für die dort genannten sechs Werte. Satz 3 folgt mithin aus Satz 1 zunächst für $p = 2$ und mit

Hilfe von Satz 2 auch für beliebiges $p > 1$. Um auch Satz 4 vollständig zu beweisen, wollen wir nun für $t = 1, 2, \ldots$ je ein reguläres, orientierbares Polyeder der Typen

$$(1, 6+12t, 3), \quad (2, 6+6t, 3), \quad (3, 6+4t, 3),$$
$$(4, 6+3t, 3), \quad (6, 6+2t, 3), \quad (12, 6+t, 3)$$

konstruieren.

1. In dem orientierbaren Monoeder $(1, 18, 3)$ von § 1 kann der folgende spezielle Ausschnitt

$$\text{(A)} \qquad \ldots b_1\ b_2^{-1} \ldots b_2\ b_3^{-1} \ldots b_3\ b_1^{-1} \ldots$$

ausgewählt werden. Wenn allgemein ein orientierbares Monoeder $(1, r, 3)$ auf diese spezielle Form (A) gebracht werden kann, so gibt es auch ein orientierbares Monoeder $(1, r+12, 3)$, welches wir nämlich durch

$$\ldots b_1\ d_1^{-1}\ d_3\ e_1^{-1}\ e_3\ b_2^{-1} \ldots b_2\ d_2^{-1}\ d_1\ e_2^{-1}\ e_1\ b_3^{-1} \ldots b_3\ d_3^{-1}\ d_2\ e_3^{-1}\ e_2\ b_1^{-1} \ldots$$

definieren können. Dieses $(1, r+12, 3)$ hat wiederum die Form (A), nämlich

$$\ldots b_1\ d_1^{-1} \ldots d_1\ e_2^{-1} \ldots e_2\ b_1^{-1} \ldots .$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir für jedes t ein Monoeder vom Typ $(1, 6+12t, 3)$.

2. Wenn ein o.r.P. $(2, r, 3)$ existiert, welches in der Form

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \ldots b_1^{-1}\ a_1 \ldots b_2^{-1}\ c_2 \ldots a_2^{-1}\ b_2 \ldots \\ \ldots c_2^{-1}\ a_2 \ldots c_1^{-1}\ b_1 \ldots a_1^{-1}\ c_1 \ldots \end{cases}$$

geschrieben werden kann, dann gibt es auch ein o.r.P. $(2, r+6, 3)$, das wir nämlich durch

$$\begin{aligned} &\ldots b_1^{-1}\ d_2 \quad e_1^{-1}\ a_1 \ldots b_2^{-1}\ f_2^{-1}\ e_1 \quad c_2 \ldots a_2^{-1}\ e_2^{-1}\ d_1 \quad b_2 \ldots \\ &\ldots c_2^{-1}\ d_2^{-1}\ f_1 \quad a_2 \ldots c_1^{-1}\ e_2 \quad f_1^{-1}\ b_1 \ldots a_1^{-1}\ f_2 \quad d_1^{-1}\ c_1 \ldots \end{aligned}$$

definieren können. Auch dieses o.r.P. $(2, r+6, 3)$ läßt sich wiederum auf die Form (zyklisch vertauscht)

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \ldots a_2^{-1}\ e_2^{-1} \ldots e_1^{-1}\ a_1 \ldots f_2^{-1}\ e_1 \quad \ldots \\ \ldots a_1^{-1}\ f_2 \quad \ldots f_1 \quad a_2 \ldots e_2 \quad f_1^{-1} \ldots \end{cases}$$

bringen.

Als Induktionsanfang benützen wir das in § 1 angegebene o.r.P. $(2, 12, 3)$, das wir auch in der Form (B) schreiben können; etwa

$$(2, 12, 3) \qquad \begin{cases} \ldots a_2 \quad a_3 \quad \ldots b_2 \quad a_4 \quad \ldots a_7 \quad b_2^{-1} \ldots \\ \ldots a_4^{-1}\ a_7^{-1} \ldots c_1^{-1}\ a_2^{-1} \ldots a_3^{-1}\ c_1 \quad \ldots . \end{cases}$$

Nach vollständiger Induktion ergibt sich für jedes t ein o.r.P. $(2, 6+6t, 3)$.

3. Ein o.r.P. $(3, 4r+2, 3)$ können wir sogar explizite angeben:

$$(4r+2,3)\begin{cases} a_1^{-1} & b_2 & a_3^{-1} & b_4 & a_5^{-1} b_6 & \dots b_{2r} a_{2r+1}^{-1} b_{2r+1} a_{2r}^{-1} \dots a_6^{-1} b_5 a_4^{-1} b_3 a_2^{-1} & b_1 \\ b_1^{-1} & c_1 & b_2^{-1} & c_2 & b_3^{-1} c_3 & \dots \dots \dots & b_{2r}^{-1} c_{2r} b_{2r+1}^{-1} c_{2r+1} \\ c_{2r+1}^{-1} a_{2r+1} & c_{2r-1}^{-1} a_{2r} & c_{2r}^{-1} a_{2r-1} \dots & c_5^{-1} a_6 c_6^{-1} a_5 c_3^{-1} a_4 c_4^{-1} a_3 c_1^{-1} a_2 & c_2^{-1} & a_1. \end{cases}$$

4. Noch einfacher läßt sich für $n = 1, 2, \dots$ ein o.r.P. $(4, 3n, 3)$ beschreiben:

$$(4,3n,3)\qquad \begin{cases} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots a_n & b_n & c_n \\ a_1^{-1} & d_1 & e_1 & a_2^{-1} & d_2 & e_2 & \dots a_n^{-1} & d_n & e_n \\ e_n^{-1} & f_n & b_n^{-1} & e_{n-1}^{-1} & f_{n-1} & b_{n-1}^{-1} \dots & e_1^{-1} & f_1 & b_1^{-1} \\ c_n^{-1} & f_n^{-1} & d_n^{-1} & c_{n-1}^{-1} & f_{n-1}^{-1} & d_{n-1}^{-1} \dots & c_1^{-1} & f_1^{-1} & d_1^{-1}. \end{cases}$$

6. Es möge ein o.r.P. $(6, r, 3)$ existieren mit der Eigenschaft: Es lassen sich zwei Eckpunkte derart auswählen, daß jedes der sechs r-Ecke genau mit einem dieser beiden Eckpunkte inzidiert. Unter dieser Voraussetzung gibt es auch ein o.r.P. $(6, r+2, 3)$ mit derselben obigen Eigenschaft.

Beweis. Das Polyeder $(6, r, 3)$ muß wegen der genannten Eigenschaft die Form haben:

$$(6,r,3)\qquad \begin{cases} \dots b_1^{-1} a_1 \dots \\ \dots a_1^{-1} c_1 \dots \\ \dots c_1^{-1} b_1 \dots \\ \dots c_2^{-1} a_2 \dots \\ \dots a_2^{-1} b_2 \dots \\ \dots b_2^{-1} c_2 \dots . \end{cases}$$

Hieraus läßt sich das neue Polyeder

$$(6,r+2,3)\qquad \begin{cases} \dots b_1^{-1} & d_2 & e_1^{-1} & a_1 \dots \\ \dots a_1^{-1} & f_2 & d_1^{-1} & c_1 \dots \\ \dots c_1^{-1} & e_2 & f_1^{-1} & b_1 \dots \\ \dots c_2^{-1} & d_2^{-1} & f_1 & a_2 \dots \\ \dots a_2^{-1} & e_2^{-1} & d_1 & b_2 \dots \\ \dots b_2^{-1} & f_2^{-1} & e_1 & c_2 \dots \end{cases}$$

konstruieren, welches offenbar wieder obige Eigenschaft besitzt. Als Induktionsanfang kann man hier den Würfel $(6, 4, 3)$ benützen. Der Induktionsschluß liefert für jedes t ein o.r.P. $(6, 6+2t, 3)$.

12. Auf dieselbe Art kann man beweisen: Wenn ein o.r.P. $(12, r, 3)$ existiert, in welchem sich vier Eckpunkte derart finden lassen, daß jedes 12-Eck mit einem dieser vier Eckpunkte inzidiert, so existiert auch ein o.r.P. $(12, r+2, 3)$ mit derselben Eigenschaft. Der Beweis ergibt sich, indem man die beiden unter 6. angeführten sechszeiligen Ausschnitte in zwei Exemplaren übereinanderschreibt (also 12-zeilig).

Das Pentagondodekaeder $(12,5,3)$ hat die hier verlangte Eigenschaft. Also gibt es für $t=1,3,5,\ldots$ ein o.r.P. $(12,6+t,3)$. Nach 6. gibt es für $t=2,4,\ldots$ ein o.r.P. $(6,6+t,3)$. Aus Satz 2 folgt nun auch die Existenz eines o.r.P. $(12,6+t,3)$. Es gibt also für jedes t ein o.r.P. $(12,6+t,3)$. — Nun ist Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *Dann und nur dann existiert ein orientierbares lokal-reguläres Polyeder vom Typ* $(m,r,3)$, *wenn* $\frac{m(r-6)}{12}+1$ *eine nicht negative ganze Zahl ist.*

Wenn p das Geschlecht der durch das Polyeder $(m,r,3)$ dargestellten orientierbaren Fläche bedeutet, so lautet die EULERsche Formel

$$\frac{m(r-6)}{6}=2p-2,$$

womit das „nur dann" bewiesen ist. Umgekehrt sei $\frac{m(r-6)}{12}+1=p$ eine nicht negative ganze Zahl. Wir betrachten zunächst den Fall

$p>1$. Es sei $d=(m,12)$ der größte gemeinsame Teiler von m und 12. Dann ist

$$r-6=\frac{(p-1)\,d}{m}\cdot\frac{12}{d}.$$

Nach Satz 4 gibt es für die ganze Zahl $\frac{(p-1)\,d}{m}=t$ ein o.r.P. $\left(d,6+\frac{12}{d}t,3\right)$ und nach Satz 2 auch ein o.r.P. $(m,r,3)$, w. z. b. w.

$p=0$ (Kugel). Die Gleichung $m(r-6)=-12$ hat genau vier positiv-ganzzahlige Lösungspaare, die durch Pentagondodekaeder, Würfel, Tetraeder und Trieder realisiert sind.

$p=1$ (Torus). Aus $m(r-6)=0$ folgt $r=6$. Durch

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_1^{-1}\ a_2^{-1}\ a_3^{-1}$$

ist ein o.r.P. $(1,6,3)$ definiert. Nach Satz 2 folgt hieraus die Existenz eines o.r.P. $(m,6,3)$ für $m=1,2,\ldots$.

Satz 5 ist also bewiesen.

§ 3. Orientierbare Monoeder.

Es sei auf $\mathfrak{F}_p$ ein o.r.P. $(1,r,s)$ gegeben. Die zugehörige EULERsche Formel $rs-2r-2s=4s(p-1)$ bringen wir auf die Form

$$r(s-2)=2s(2p-1).$$

Die Zahl r ist durch s teilbar, da die Anzahl der Eckpunkte im betrachteten Monoeder gleich r/s ist.

Falls s gerade ist, setzen wir $r=\beta s$ und $s-2=2\alpha$. Es wird dann $\alpha\beta=2p-1$ und das Monoeder hat die Form $(1,2\beta(\alpha+1),2(\alpha+1))$.

Falls s ungerade ist, können wir, da dann r gerade ist, $r=2\beta s$ und $s-2=\alpha$ setzen. Das Monoeder erhält somit die Form $(1,2\beta(\alpha+2),\alpha+2)$, wobei wieder $\alpha\beta=2p-1$ gilt.

Hierzu gilt auch die Umkehrung. Wir beweisen nämlich jetzt

Satz 6. *Wenn das Zahlenpaar α, β alle positiven, ganzzahligen Faktorzerlegungen der Zahl $2p-1$ durchläuft ($2p-1=\alpha\beta$), so sind durch*

$$(1, 2\beta(\alpha+1), 2(\alpha+1)) \quad \text{und} \quad (1, 2\beta(\alpha+2), \alpha+2)$$

alle auf der geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlechte $p>1$ realisierbaren Monoedertypen aufgezählt.

Beweis. α und β sind immer ungerade. Es folgt aus den folgenden beiden Abschnitten a) und b), daß die genannten Monoedertypen tatsächlich auftreten.

a) *Für $n=2, 4, \ldots$ und $h=0, 1, 2, \ldots$ existiert ein orientierbares Monoeder vom Typ $(1, 2n(2h+1), 2n)$.*

Im Sonderfall $h=0$ ist durch die Zeile

$$a_1\ a_2 \ldots a_n\ a_1^{-1}\ a_2^{-1} \ldots a_n^{-1}$$

ein orientierbares Monoeder vom Typ $(1, 2n, 2n)$ mitgeteilt. Für $h>0$ wird ein solches Monoeder durch folgendes Schema beschrieben. Diese n Zeilen sind hintereinander als eine einzige Zeile zu lesen.

$$\begin{array}{l}
a_n^{-1}\ c_{1,h}^{-1}\, d_{1,h-1} \ldots c_{1,3}^{-1}\, d_{1,2}\, c_{1,2}^{-1}\, d_{1,1}\, c_{1,1}^{-1}\, a_1\, b_1\, c_{1,1}\, d_{2,1}^{-1}\, c_{1,2}\, d_{2,2}^{-1}\, c_{1,3} \ldots d_{2,h-1}^{-1}\, c_{1,h}\, b_2^{-1} \\
a_1^{-1}\ c_{2,h}^{-1}\, d_{2,h-1} \ldots c_{2,3}^{-1}\, d_{2,2}\, c_{2,2}^{-1}\, d_{2,1}\, c_{2,1}^{-1}\, a_2\, b_2\, c_{2,1}\, d_{3,1}^{-1}\, c_{2,2}\, d_{3,2}^{-1}\, c_{2,3} \ldots d_{3,h-1}^{-1}\, c_{2,h}\, b_3^{-1} \\
a_2^{-1}\ c_{3,h}^{-1}\, d_{3,h-1} \ldots c_{3,3}^{-1}\, d_{3,2}\, c_{3,2}^{-1}\, d_{3,1}\, c_{3,1}^{-1}\, a_3\, b_3\, c_{3,1}\, d_{4,1}^{-1}\, c_{3,2}\, d_{4,2}^{-1}\, c_{3,3} \ldots d_{4,h-1}^{-1}\, c_{3,h}\, b_4^{-1} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \

Beim Beweis unterscheiden wir die beiden Fälle $r \leqq n$ und $r \geqq n$.

α) Falls $r \leqq n$ ist, wird durch die folgenden $2r+2$ Zeilen, die hintereinander als ein einziger Zyklus zu lesen sind, ein o.r.P. $(1, 2(r+1)(n+1), n+1)$ beschrieben.

$$
\begin{array}{cccccccc}
c_1 & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} \ldots . & & . & . & a_{1n}^{-1} & c_1^{-1} \\
c_2 & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} \ldots . & & . & . & a_{2n}^{-1} & c_2^{-1} \\
. & . & . \ldots . & & . & . & . & . \\
. & . & . \ldots . & & . & . & . & . \\
c_r & a_{r1}^{-1} & a_{r2}^{-1} \ldots . & & . & . & a_{rn}^{-1} & c_r^{-1} \\
b_1 & b_2 & b_3 \ldots b_{n-r+1} & & & & & \\
d_1 & a_{1n-1} & a_{1n} \ldots a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & & d_1^{-1} \\
d_2 & a_{2n-1} & a_{2n} \ldots a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & & d_2^{-1} \\
. & . & . \ldots . & & . & . & . & . \\
. & . & . \ldots . & & . & . & . & . \\
d_r & a_{rn-1} & a_{rn} \ldots a_{r3} & a_{r4} & a_{r1} & a_{r2} & & d_r^{-1} \\
b_1^{-1} & b_2^{-1} & b_3^{-1} \ldots b_{n-r+1}^{-1} & & & & &
\end{array}
$$

Man kann leicht aufzählen, welche Kanten in zyklischer Reihenfolge in einem Eckpunkt des eben beschriebenen Polyeders $(1, 2(r+1)(n+1), n+1)$ zusammentreffen $(i = 1, 2, \ldots, r)$:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(c_i & a_{i1} & a_{i2}^{-1} & a_{i3} & a_{i4}^{-1} & . & . & . & . & . & . & a_{in}^{-1}), \\
(d_i & a_{in-1}^{-1} & a_{in} & . & . & . & . & . & a_{i3}^{-1} & a_{i4} & a_{i1}^{-1} & a_{i2}), \\
(c_1^{-1} & c_2^{-1} & . & . & c_r^{-1} & b_1 & b_2^{-1} & b_3 & b_4^{-1} & . & . & b_{n-r+1}), \\
(d_1^{-1} & d_2^{-1} & . & . & d_r^{-1} & b_1^{-1} & b_2 & b_3^{-1} & b_4 & . & . & b_{n-r+1}^{-1}).
\end{array}
$$

Mit jedem Eckpunkt inzidieren tatsächlich genau $n+1$ Kanten.

β) Für das Folgende $(r \geqq n)$ ist es vorteilhaft den Spezialfall $r = n$ im eben konstruierten Polyeder besonders zu betrachten. Dieses o.r.P. $(1, 2(n+1), n+1)$ enthält den Ausschnitt

$$\ldots b_1^{-1}\ c_1 \ldots c_1^{-1}\ c_2 \ldots c_2^{-1}\ c_3 \ldots c_{n-1}^{-1}\ c_n \ldots c_n^{-1}\ b_1 \ldots .$$

Nun beweisen wir den

Hilfssatz 1. *Wenn ein orientierbares Monoeder vom Typ* $(1, 2(s+1)(n+1), n+1)$ *existiert, deren Kantendarstellung sich in der Form*

$$\text{(C)} \qquad \ldots a_1^{-1}\ a_2 \ldots a_2^{-1}\ a_3 \ldots a_3^{-1}\ a_4 \ldots a_n^{-1}\ a_{n+1} \ldots a_{n+1}^{-1}\ a_1 \ldots$$

schreiben läßt, so existiert auch ein o.r.P. $(1, 2(s+3)(n+1), n+1)$, *in welchem sich ebenfalls ein Ausschnitt von der Form* (C) *finden läßt.*

Beweis. Mit Hilfe des gegebenen Polyeders findet man durch formales Einschieben der neuen Kanten h_i, f_i das neue Polyeder

$$\ldots a_1^{-1}\, f_2\, h_1^{-1}\, h_2\, f_1^{-1}\, a_2 \ldots a_2^{-1}\, h_3\, f_2^{-1}\, f_3\, h_2^{-1}\, a_3 \ldots a_3^{-1}\, h_4\, f_3^{-1}\, f_4\, h_3^{-1}\, a_4 \ldots$$
$$\ldots a_n^{-1}\, h_{n+1}\, f_n^{-1}\, f_{n+1}\, h_n^{-1}\, a_{n+1} \ldots a_{n+1}^{-1}\, h_1\, h_{n+1}^{-1}\, f_1\, f_{n+1}^{-1}\, a_1 \ldots .$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß dieses so definierte Polyeder lokal-regulär vom gesuchten Typ $(1, 2(s+3)(n+1), n+1)$ ist. Es läßt sich in ihm auch ein Ausschnitt

$$\ldots a_1^{-1}\, f_2 \ldots f_2^{-1}\, f_3 \ldots f_3^{-1}\, f_4 \ldots f_n^{-1}\, f_{n+1} \ldots f_{n+1}^{-1}\, a_1 \ldots$$

von der gewünschten Art (C) finden. Hilfssatz 1 ist bewiesen.

Die $(r-n)/2$-malige Anwendung von Hilfssatz 1 auf das oben betrachtete o.r.P. $(1, 2(n+1)^2, n+1)$ ergibt ein o.r.P. $(1, 2(r+1)(n+1), n+1)$. Hiermit ist auch im Falle $r \geqq n$ die Aussage b) bewiesen.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

Zuletzt erschienen die folgenden Bände:

XIX. und XX. Band: **Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.**

Von **G. Pólya** und Dr. **G. Szegö**, Professoren an der Stanford University California, USA. Zwei Bände.

Erster Band: **Reihen, Integralrechnung, Funktionentheorie.** Zweite, unveränderte Auflage. XVI, 338 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 24.—; Ganzleinen DM 27.60

Inhaltsübersicht: **Unendliche Reihen und Folgen.** Das Rechnen mit Potenzreihen. Reihentransformationen; Ein Satz von Cesàro. Die Struktur reeller Folgen und Reihen. Vermischte Aufgaben. — **Integralrechnung.** Das Integral als Grenzwert von Rechtecksummen. Ungleichungen. Einiges über reelle Funktionen. Verschiedene Arten der Gleichverteilung. Funktionen großer Zahlen. — **Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Allgemeiner Teil.** Komplexe Zahlen und Zahlenfolgen. Abbildungen und Vektorfelder. Geometrisches über den Funktionsverlauf. Cauchyscher Integralsatz; Prinzip vom Argument. Folgen analytischer Funktionen. Das Prinzip vom Maximum. Namenverzeichnis.

Zweiter Band: **Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie.** Zweite, unveränderte Auflage. X, 407 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 28.40; Ganzleinen DM 32.—

Inhaltsübersicht: **Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Spezieller Teil.** Maximalglied und Zentralindex, Maximalbetrag und Nullstellenanzahl. Schlichte Abbildungen. Vermischte Aufgaben. — **Die Lage der Nullstellen.** Der Satz von Rolle und die Regel von Descartes. Geometrisches über die Nullstellen von Polynomen. Vermischte Aufgaben. — **Polynome und trigonometrische Polynome.** — **Determinanten und quadratische Formen.** — **Zahlentheorie.** Zahlentheoretische Funktionen. Ganzzahlige Polynome und ganzwertige Funktionen. Zahlentheoretisches über Potenzreihen. Einiges über algebraische ganze Zahlen. Vermischte Aufgaben. **Anhang.** Einige geometrische Aufgaben. Namenverzeichnis zum zweiten Band. Sachverzeichnis zu beiden Bänden. Berichtigungen.

Band LXVII: **Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists.** By **Paul F. Byrd,** Aeronautical Research Scientist, National Advisory Committee for Aeronautics (USA.), formerly Assistant Professor of Mathematics Fisk University, and **Morris D. Friedman,** Aeronautical Research Scientist, National Advisory Committee for Aeronautics (USA.). With 22 figures. XIII, 355 pages Gr.-8°. 1954. DM 36.—; Ganzleinen DM 39.60

Table of Contents: Preface. List of Symbols and Abbreviations. Introduction. Definitions and Fundamental Relations. Reduction of Algebraic Integrands to Jacobian Elliptic Functions. Reduction of Trigonometric Integrands to Jacobian Elliptic Functions. Reduction of Hyperbolic Integrands to Jacobian Elliptic Functions. Tables of Integrals of Jacobian Elliptic Functions. Elliptic Integrals of the Third Kind. Table of Miscellaneous Elliptic Integrals Involving Trigonometric or Hyperbolic Integrands. Elliptic Integrals Resulting from Laplace Transformations. Hyperelliptic Integrals. Integrals of the Elliptic Integrals. Derivatives. Miscellaneous Integrals and Formulas. Expansions in Series. Appendix. Bibliography. Index.

... Diese zweibändige Aufgabensammlung, die im ganzen über 1600 Aufgaben enthält, muß den Verfassern eine ungewöhnliche Mühe gemacht haben; aber vielleicht auch eine ungewöhnliche Freude, weil sie etwas durchaus Neues und Eigenes zu schaffen wußten. Und diese Lust, mit der die Verfasser am Werke gewesen sein müssen, spürt man durch das ganze Buch und muß jeden mit Begeisterung zur Sache erfüllen, der überhaupt Sinn für mathematische Forschungs- und Gedankenarbeit hat ... Der Stoff, der in den 1600 Aufgaben behandelt wird, ist ungeheuer reich. Die Funktionentheorie spielt zwar durchaus eine beherrschende Rolle; doch kommt fast alles, was im weiteren Sinn mit ihr zusammenhängt, zur Sprache... Das Wesentliche aber ist gar nicht diese Stoffülle und ihre Auswahl. Die besondere Eigenart und der hohe Wert der Sammlung liegt durchaus in der Art, wie dieser Stoff geboten wird ...

„Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Integraltafeln

Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen

Von Dr.-Ing. **W. Meyer zur Capellen,** Aachen. VIII, 292 Seiten Gr.-8°. 1950.
Ganzleinen DM 36.—

Aus den Besprechungen: ... Die von Meyer zur Capellen bearbeitete Tafel der unbestimmten Integrale liegt nun vor. Um die Tafel mit Erfolg benützen zu können, sind einige Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung erforderlich. Auch soll man mit der Tafel vertraut sein. Der erste Abschnitt enthält die wichtigsten Integrationsregeln und Bemerkungen zum Gebrauch der Tafeln. Der zweite bis fünfte Abschnitt bringt die Integralformeln. Die Einteilung erfolgt nach dem Integranden (rationale Funktionen, algebraisch irrationale Funktionen, transzendente Funktionen, Produkte von algebraischen und transzendenten Funktionen, Produkte von transzendenten Funktionen). Jeder dieser Abschnitte ist vielfach unterteilt. Man benutze das ausführliche Inhaltsverzeichnis, um das gesuchte Integral rasch zu finden. Manchmal werden Rekursionsformeln angegeben; meist sind die Integrale ganz ausgerechnet. Besonders groß ist die Zahl der Sonderfälle, was dem mathematisch Ungeübten oft erwünscht ist, andererseits den Umfang der Tafel wesentlich vergrößert ...
Im sechsten Abschnitt sind wichtige Konstante und einige Reihenentwicklungen zusammengestellt. Ferner werden einige nicht elementare Funktionen erklärt.
Die Tafel enthält etwa 3000 Integrale und ist ein sehr wertvoller Behelf für den angewandten Mathematiker...
„Monatshefte für Mathematik"

Leitfaden der Nomographie

Von Dr.-Ing. **W. Meyer zur Capellen,** Aachen. Mit 203 Abbildungen.
IV, 178 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 17.40

Aus den Besprechungen: Ein Kennzeichen dieses Leitfadens ist der übersichtliche, systematisch angelegte Weg, auf dem der Leser in das Gebiet der Nomographie eingeführt wird. Die Zweiteilung des Buches in „Theoretische Grundlagen" und „Beispiele und Anwendungen" erweist sich als sehr zweckmäßig. Zwar wird im ersten Teil beim Erläutern der Grundlagen keineswegs auf Beispiele verzichtet, aber im Vordergrund steht doch die sorgfältige und straffe Darstellung der verschiedenen Nomogrammarten: Funktionsnetze, Kurventafeln, Fluchtlinientafeln. Weiterführende Kapitel behandeln das Verzerren und Verstrecken von Kurventafeln zu Geradentafeln, ihre Verwandlung zu Fluchtlinientafeln, Tafeln mit krummlinigen Leitern und die projektive Abbildung. Auf 90 Seiten ist viel Stoff in erfreulich kurzer und übersichtlicher Form zusammengetragen, ergänzt durch ein Schrifttumsverzeichnis von 68 Werken für weitergehendes Studium. Im zweiten Teil sind dann an einer großen Zahl von Beispielen Hinweise für die Anfertigung der verschiedenen Nomogrammarten gegeben, für Maßstabswahl, zweckmäßige Teilungen, günstigste Nomogrammform. Dadurch ist das Buch gleichermaßen für den Praktiker geeignet, der schnell zur zweckmäßigsten Nomogrammform kommen will, wie für denjenigen, der in sorgfältigem Studium alle nomographischen Möglichkeiten ausschöpfen möchte. Die Ausstattung des Buches ist ausgezeichnet.

„Elektrotechnische Zeitschrift"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.